СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ТЕОРИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Для студентов всех форм обучения

МОСКВА 2013

Автор: В.А. Алехин.

Редактор: В.Ю. Маслов

Материал предназначен для студентов специальностей 230101, 230105, 210301, 220201, 220401, 210105, 210108, 210104, изучающих дисциплины «Общая электротехника», «Теоретические основы электротехники», «Электротехника», «Электротехника, электроника и схемотехника».

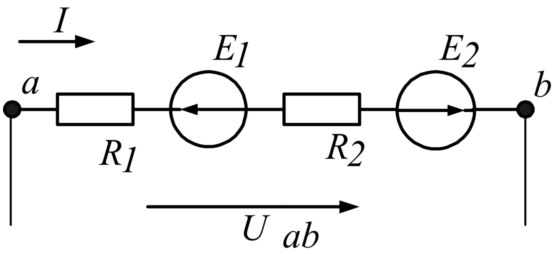
Печатаются по решению редакционно-издательского совета Московского государственного технического университета радиотехники, электроники и автоматики (МИРЭА).

Рецензенты: Р.М. Закалюкин, В.Н. Цыпкин

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ЭЛЕКТРОТЕХНИКЕ

Часть 1. Электрические цепи постоянного и гармонического тока

Задача 1



Дано:

$E = 120\,В, L = 10\,мГн, C = 68\,нФ,$
$E_1 = 6\,В, E_2 = 4\,В,$
$R_1 = 3\ Ом, R_2 = 2\,Ом, U_{ab} = 12\,В$

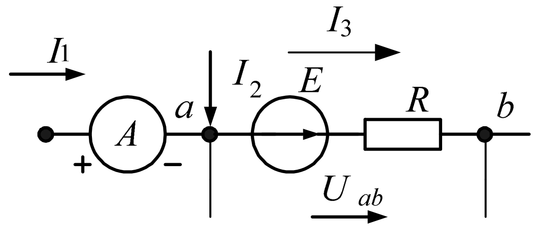
Найти ток *I*.

Решение

По обобщенному закону Ома: $I = \dfrac{U_{ab} - E_1 + E_2}{R_1 + R_2} = \dfrac{12 - 6 + 4}{3 + 2} = 2A$.

Пояснение: U_{ab} и E_2 совпадают по направлению с током *I* и взяты со знаком плюс.

Задача 2



Дано:

$E = 9\,В, I_2 = 2\,А,$
$U_{ab} = 3\,В, R = 4\,Ом$

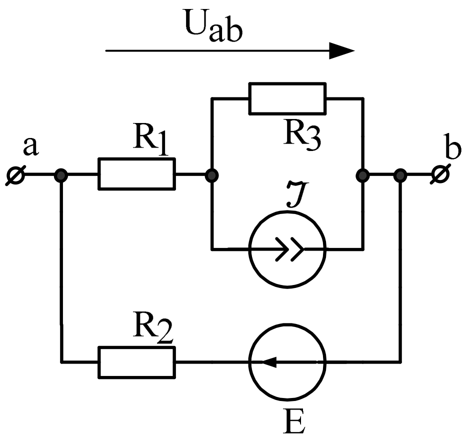
Найти показания амперметра.

Решение

$$I_3 = \frac{U_{ab} + E}{R} = 3A;\ \ I_1 = I_3 - I_2 = 1\,A.$$

Ответ: 1 А

Задача 3

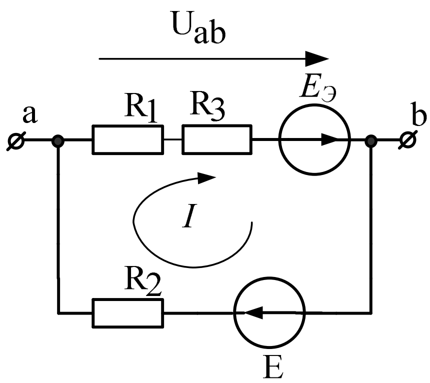


Дано: J=1А, E=12 В,

R_1=R_2=4 Ом, R_3=8 Ом.

Найти U_{ab}.

Решение

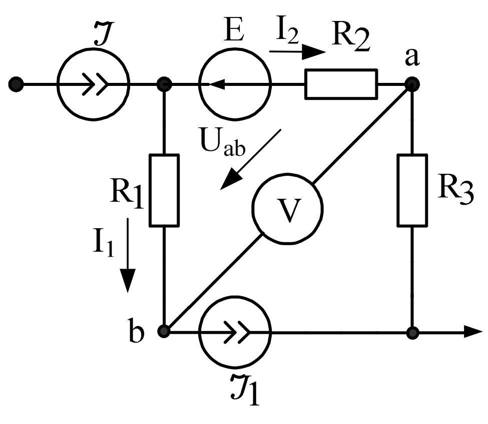


Преобразуем источник тока с параллельно включенным сопротивлением R_3 в эквивалентный источник напряжения $E_Э=JR_3$=8В с последовательным сопротивлением R_3. Получим одноконтурную цепь.

В этой цепи:

$$U_{ab} = -E_Э + I \cdot (R_1 + R_3) = -E_Э + \frac{E + E_Э}{R_1 + R_2 + R_3} \cdot (R_1 + R_3) = 2\,B$$

Задача 4



Дано: J=2А, J_1=1А, E=10В,

R_1=2 Ом, R_2=4 Ом, R_3= 2 Ом.

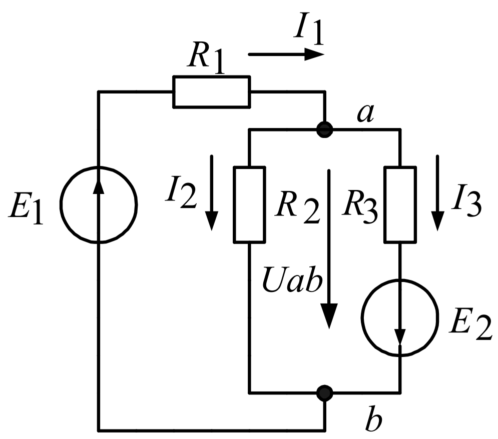
Найти показания вольтметра.

Решение

Внутреннее сопротивление идеального вольтметра бесконечно велико. Поэтому ток через вольтметр не проходит и I_1=J_1=1А, I_2=J-I_1=1А. Считаем потенциал узла b равным нулю. Обходим ветви 1 и 2 в направлении узла a и находим:

$$U_{ab} = I_1R_1 - E - I_2R_2 = -12B\,.$$

Задача 5



Дано: R_1=5 Ом, R_2=3 Ом, R_3=4Ом, I_3=1А, E_2=1В.

Найти E_1.

Решение

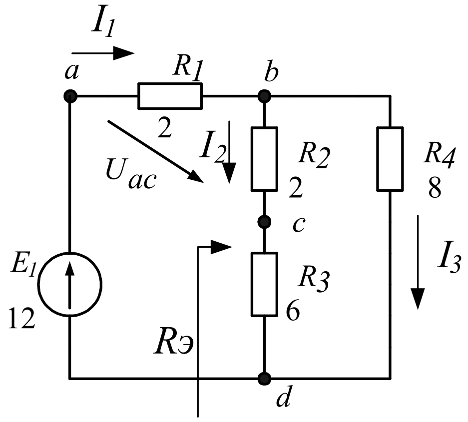
Так как заданы ток I_3 и E_2, можно найти

$U_{ab} = -E_2 + I_3R_3$. Затем находим $I_2 = \dfrac{U_{ab}}{R_2} = 1A$,

$I_1 = I_2 + I_3 = 2A$, $E_1 = U_{ab} + I_1R_1 = 13B$.

План решения: *Uab→I2→I1→E1*

Задача 6



Дано:

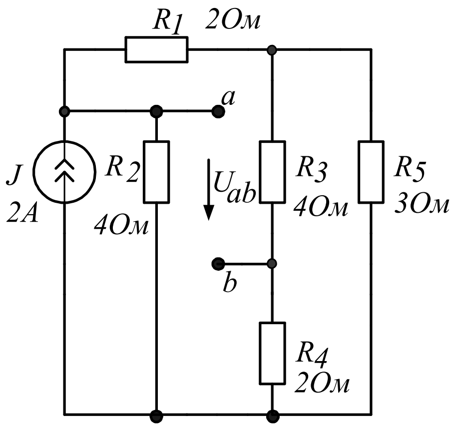
E=12В, R1=R2=2Ом, R3=6Ом, R4=8Ом.

Найти Uac.

План решения: $R_э \to R_{вх} \to I_1 \to U_{bd} \to I_2 \to U_{ac}$

Ответ: 6В

Задача 7.

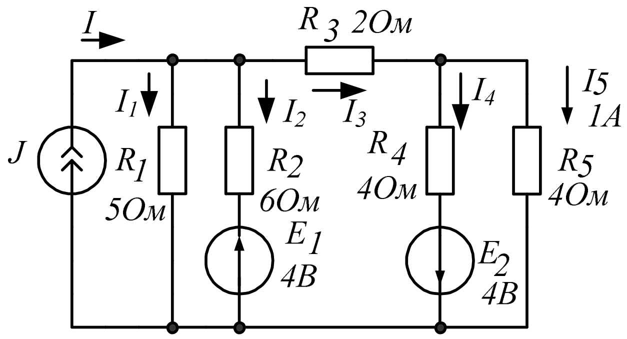


Найти Uab.

План решения: ????

Ответ: $U_{ab} = 3\frac{1}{3}B$.

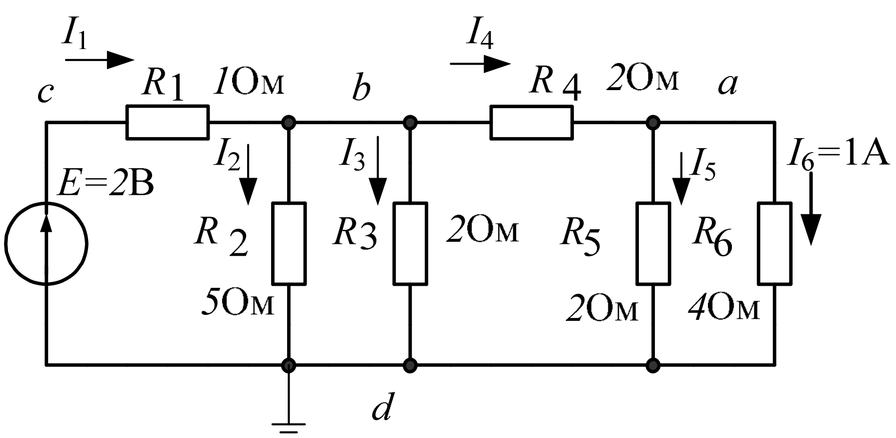
Задача 8



Найти J

Ответ: 6 А

Задача 9

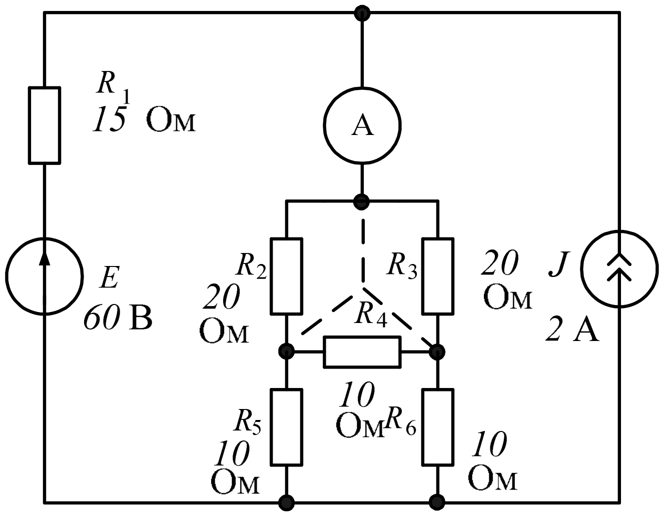


Найти токи в ветвях.

Решение методом подобия

В схеме действует только один источник напряжения. Задаем в самой удаленной ветви произвольно ток $I_6 = 1A$. Находим: $U_a = 4B, I_5 = 2A, I_4 = 3A, U_b = 10B, I_3 = 5A, I_2 = 2A, I_1 = 10A, E = 20B$. Так как в заданной схеме E=2 В искомые токи будут в 10 раз меньше (коэффициент подобия k=0,1).

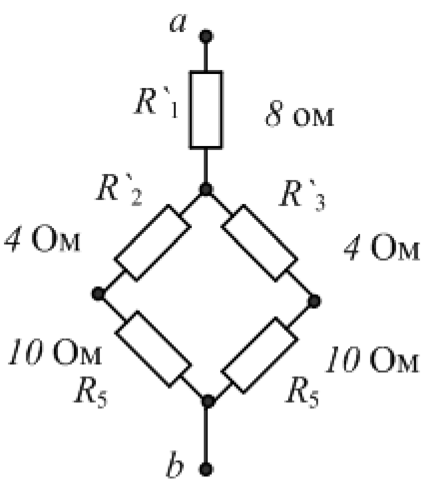
Задача 10



Найти показания амперметра.

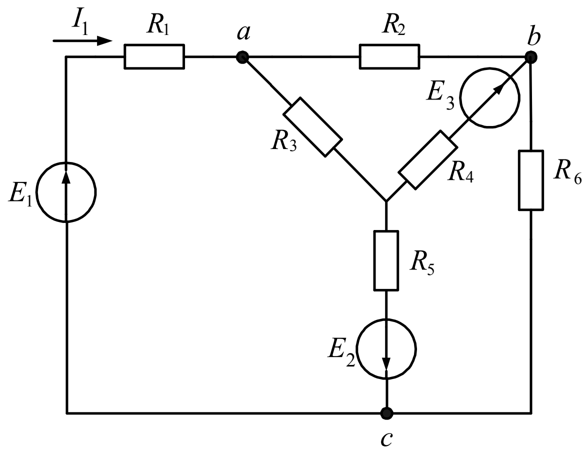
Решение

Преобразуем сопротивления треугольника $R_2R_3R_4$ в звезду: $R_1' = \dfrac{R_2R_3}{R_2+R_3+R_4} = 8\,Ом, R_2' = \dfrac{R_2R_4}{R_2+R_3+R_4} = 4\,Ом, R_3' = \dfrac{R_3R_4}{R_2+R_3+R_4} = 4\,Ом.$



Находим $R_{abэкв}$= 15 Ом. Далее по теореме наложения находим I_A=3 А.

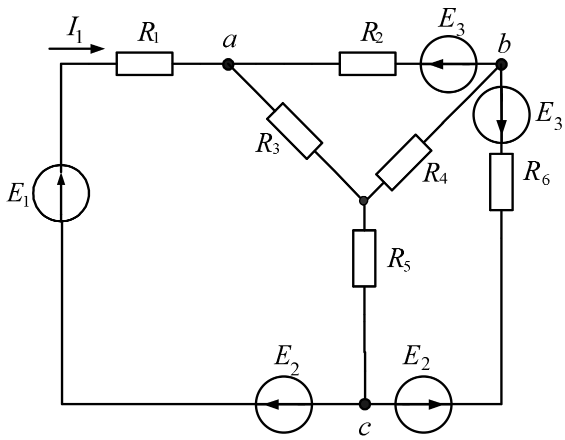
Задача 11



Дано: E_1=10 В, E_2=10 В, E_3=5 В, R_1=R_2=R_3=10 Ом, R_4= 2,5 Ом, R_5=R_6=30 Ом.

Найти ток I_1, преобразовав схему к одноконтурной.

Решение

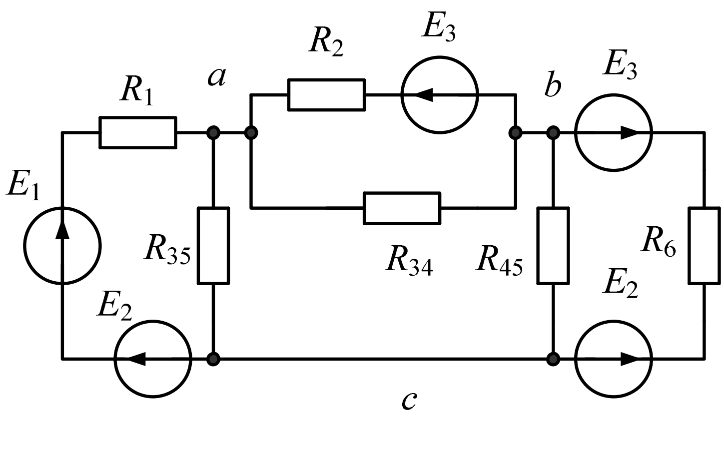


1. Для упрощения схемы перенесем источники напряжения через узлы b и c.

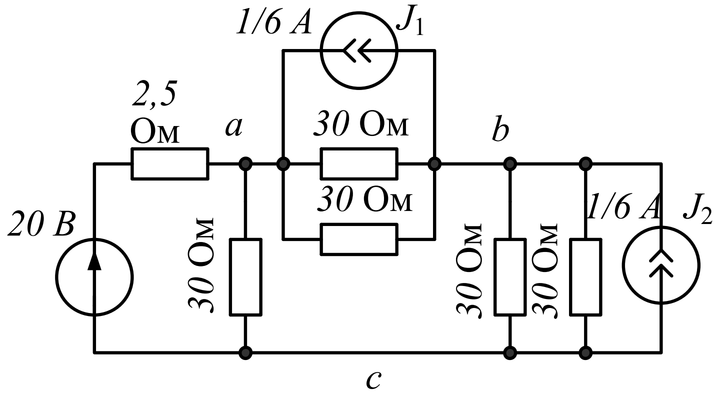
2. Преобразуем звезду в треугольник. Так как сопротивления лучей звезды равны, получим:

$$G_{34} = \frac{G_3 G_4}{G_3 + G_4 + G_5} = \frac{0{,}1 \cdot 0{,}1}{0{,}1 + 0{,}1 + 0{,}1} = \frac{1}{30} = G_{35} = G_{45}.$$

$$R_{34} = R_{35} = R_{45} = 30\,Ом.$$

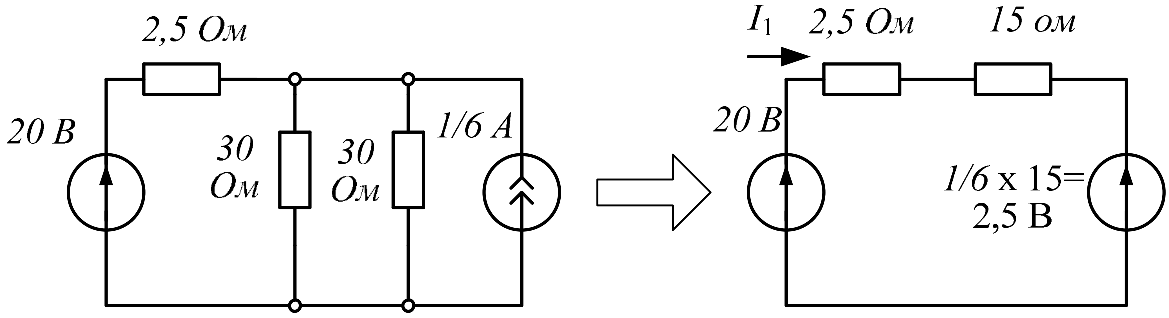


3. Объединим ИН и преобразуем источники напряжения в источники тока: $J_1 = \dfrac{E_3}{R_2} = 1/6\,\text{А}, J_2 = \dfrac{E_2 - E_3}{R_6} = 1/6\,\text{А}$. Внутренние сопротивления источников тока: $R_{\text{ит}1} = R_{\text{ит}2} = 30\,\text{Ом}$.



4. Заменим последовательно включенные источники тока эквивалентным.

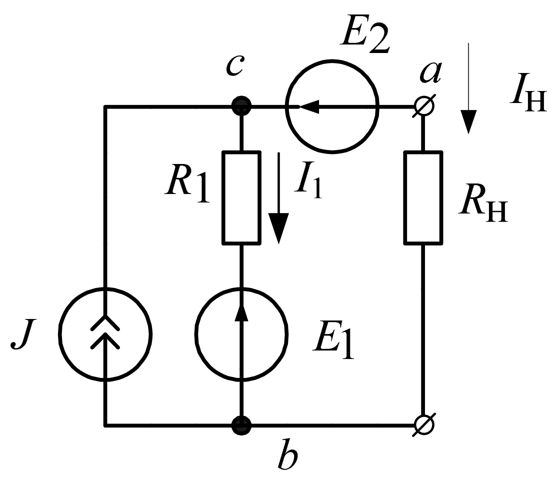
$$J_Э = \frac{\sum\limits_k J_k R_k}{\sum\limits_k R_k} = \frac{1/6 \cdot 15 + 1/6 \cdot 15}{15 + 15} = \frac{1}{6}\,\text{А};\ R_Э = \sum_k R_k = 30\,\text{Ом}.$$



5. Заменяем $J_Э$ на источник напряжения. Получаем одноконтурную схему. В ней ток $I_1 = \dfrac{20 - 2{,}5}{2{,}5 + 15} = 1\,\text{А}$.

Метод эквивалентного генератора

Задача 12



Дано: J=1A, R1=6Ом, Rн=2Ом, E1=4B, E2=2B.

Найти $I_н$ и $P_н$.

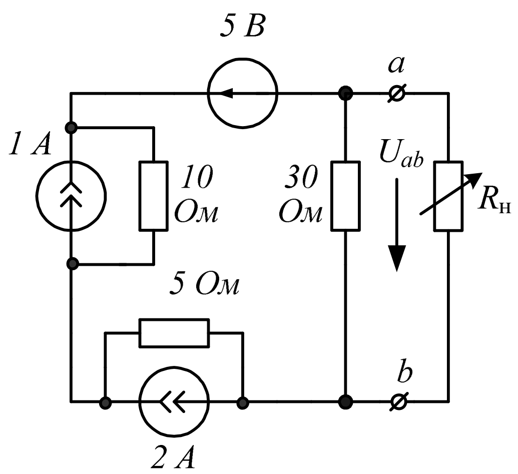
Решение:

$$U_{cbxx} = E_1 + JR_1 = 10\,B.\ U_{abxx} = U_{cbxx} - E_2 = 8\ B.\ R_{вх} = R_1 = 6\,Ом.$$

$$I_н = \frac{U_{abxx}}{R_{вх} + R_н} = 1\,A.$$

Задача 13

При какой нагрузке в ней выделяется наибольшая мощность? Найти эту мощность.



Решение

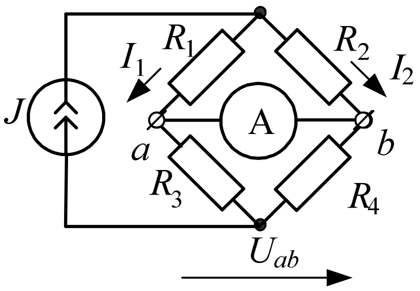
1. Заменяем источники тока на источники напряжения и находим

$$U_{abxx}=\frac{\left(2\cdot 5+1\cdot 10-5\right)}{5+10+30}\cdot 30=10\,B\textbf{.}\, R_{вх}=\frac{15\cdot 30}{45}=10\,Ом\textbf{.}\, R_{н}=10\,Ом\textbf{.}$$

Максимальная мощность в нагрузке:

$$P_{н\,\boldsymbol{max}}=\frac{U^2_{abxxabxx}}{4R_{вх}}=\frac{100}{40}=2,5\,Вт$$

Задача 14



Дано: J=4А, R_1=R_4=2Ом, R_2=R_3=4Ом.

Найти показания амперметра.

Решение

Отключим амперметр и найдем U_{abxx}. Так как $R_1+R_3=R_2+R_4$ токи $I_1=I_2=2\,\text{А}$.

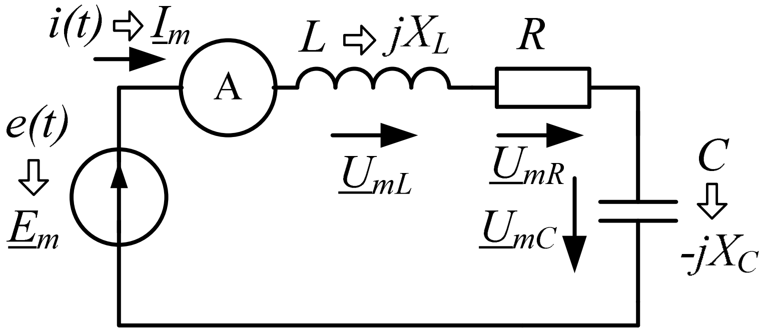
$$U_{abxx}=I_1R_3-I_1R_4=8-4=4\,B\textbf{.}\; R_{вх}=\frac{\left(R_1+R_2\right)\left(R_3+R_4\right)}{R_1+R_2+R_3+R_4}=3\,Ом\textbf{.}$$

$$I_A=\frac{U_{abxx}}{R_{вх}}=\frac{4}{3}\,A\textbf{.}$$

Ответ: 4/3А.

Расчет цепей гармонического тока

Задача №15



Дано:

$e(t) = 30\sqrt{2}\,\boldsymbol{sin}\left(10^3 t + 90^o\right) B,$

$L = 40\,мГн, C = 100\,мкФ, R = 30\,Ом$

Найти показания амперметра и построить векторную диаграмму тока и напряжений.

Решение

1. Находим комплексную амплитуду источника напряжения и комплексные сопротивления:

$$\underline{E}_m = 30\sqrt{2}e^{j90^o} = j30\sqrt{2}\,B.$$

$$jX_L = j\omega L = j10^3 \cdot 40 \cdot 10^{-3} = j40\,Ом, \; -jX_C = -j\frac{1}{\omega C} = -j\frac{1}{10^3 \cdot 100 \cdot 10^{-6}} = -j10\,ОМ.$$

$$\underline{Z} = R + jX_L - jX_C = 30 + j40 - j10 = 30 + j30\,Ом.$$

2. Находим комплексную амплитуду тока.

$$\underline{I}_m = \frac{\underline{E}_m}{\underline{Z}} = \frac{j30\sqrt{2}}{30 + j30} = \frac{30\sqrt{2}e^{j90^o}}{30\sqrt{2}e^{j45^o}} = 1 \cdot e^{j45^o} = \frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}\,A.$$

3. Находим мгновенное значение тока:

$$i(t) = 1\,\boldsymbol{sin}\left(10^3 t + 45^o\right) A.$$

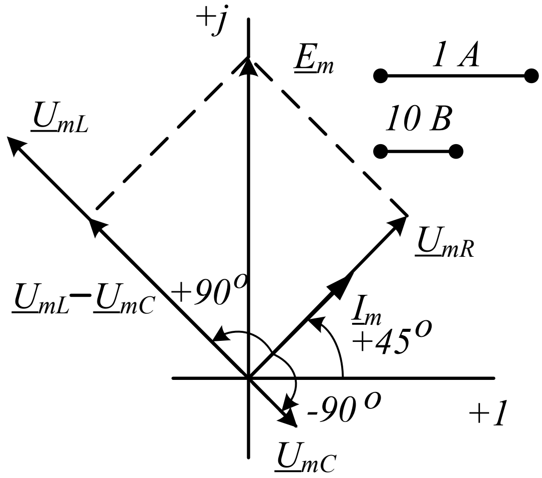
4. Амплитуда тока $I_m = 1A.$ Амперметр показывает действующее значение тока: $I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} = 0{,}707\,A.$

5. Рассчитываем комплексные амплитуды напряжений на элементах цепи:

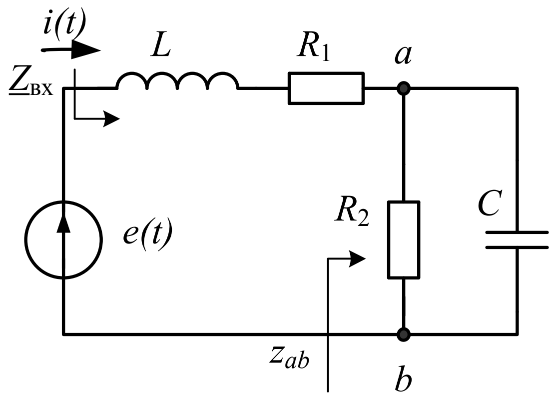
$$\underline{U}_{mR} = R\underline{I}_m = 30e^{j45^o} B, \underline{U}_{mL} = j40 \cdot 1 \cdot e^{j45^o} = 40e^{j135^o} B,$$

$\underline{U}_{mC} = -j10 \cdot 1 \cdot e^{j45^o} = 10e^{-j45^o}\ B$.

6. Строим векторную диаграмму:



Задача № 16



Дано:

$e(t) = 10\,\boldsymbol{sin}\left(10^3 t + 60^o\right) B,$

$L = 1\,мГн, C = 500\,мкФ,$

$R_1 = 1\,Ом, R_2 = 2\,Ом.$

Найти ток в цепи.

Решение

1. Находим комплексную амплитуду напряжения и комплексные сопротивления:

$$\underline{E}_m = 10e^{j60^o}\ B,\ jX_L = j10^3 \cdot 1 \cdot 10^{-3} = j1\,Ом,$$

$$-jX_C = -j\frac{1}{\omega C} = -j\frac{1}{1000 \cdot 500 \cdot 10^{-6}} = -j2\,Ом,$$

$$R_1 = 1\,Ом, R_2 = 2\,Ом.$$

2. Находим эквивалентное сопротивление $\underline{Z}вх$ и ток:

$$\underline{Z}_{вх} = jX_L + R_1 + \frac{R_2\left(-jX_C\right)}{R_2 - jX_C} = j1 + 1 + \frac{2 \cdot \left(-j2\right)}{2 - j2} =$$

$$=1+j1+\frac{-j4\cdot(2+j2)}{(2-j2)(2+j2)}=1+j1+\frac{-j4\cdot(2+j2)}{4+4}=1+j1-j+1=2\,Ом$$

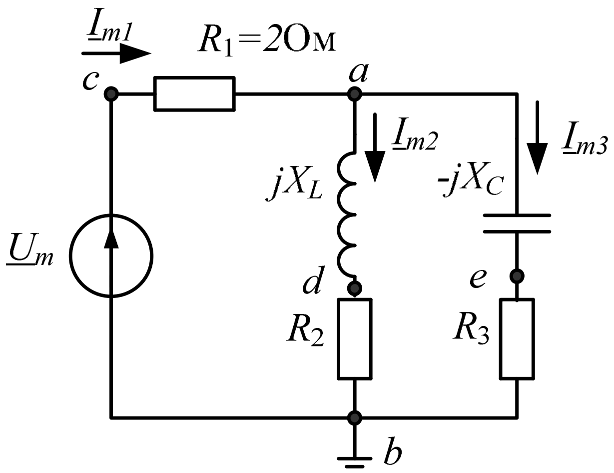
.

$$\underline{I}_m=\frac{\underline{E}_m}{\underline{Z}_{вх}}=\frac{10e^{j60^o}}{2}=5e^{j60^o}\,A.$$

$$i(t)=5\,\boldsymbol{sin}\left(10^3t+60^o\right)A.$$

Амперметр покажет действующее значение $I=\frac{I_m}{\sqrt{2}}=\frac{5}{\sqrt{2}}=3{,}54\,A$.

Задача №17



Дано: $\underline{U}_m=12e^{j45^o}\,B,$
$jX_L=j4Ом,-jX_C=-j4ОМ,$
$R_1=2Ом, R_2=4Ом,$
$R_3=4Ом.$

Найти токи в ветвях и построить векторную топографическую диаграмму.

Решение

1. Комплексные сопротивления: $\underline{Z}_1$=2 Ом, $\underline{Z}_2$=4+j4 Ом, $\underline{Z}_3$=4-j4Ом.

$$\underline{Z}_{ab}=\frac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2}=\frac{(4+j4)(4-j4)}{(4+j4)+(4-j4)}=\frac{16+16}{8}=4\,Ом.$$

$$\underline{Z}_{вх}=R_1+\underline{Z}_{ab}=2+4=6\,Ом.$$

2. Находим токи в ветвях:

$$\underline{I}_{m1}=\frac{\underline{U}_m}{\underline{Z}_{вх}}=\frac{12e^{j45^o}}{6}=2e^{j45^o}\,A.$$

По правилу деления токов:

$$\underline{I}_{m2}=\frac{\underline{I}_{m1}\left(4-j4\right)}{\left(4+j4\right)+\left(4-j4\right)}=\frac{2e^{j45^o}\left(4-j4\right)}{\left(4+j4\right)+\left(4-j4\right)}=$$

$$=\left(1-j1\right)e^{j45^o}=\sqrt{2}e^{-j45^o}e^{j45^o}=\sqrt{2}A.$$

$$\underline{I}_{m3}=\frac{\underline{I}_{m1}\left(4+j4\right)}{\left(4+j4\right)+\left(4-j4\right)}=\sqrt{2}e^{j90^o}A.$$

3. Находим комплексные напряжения в точках схемы:

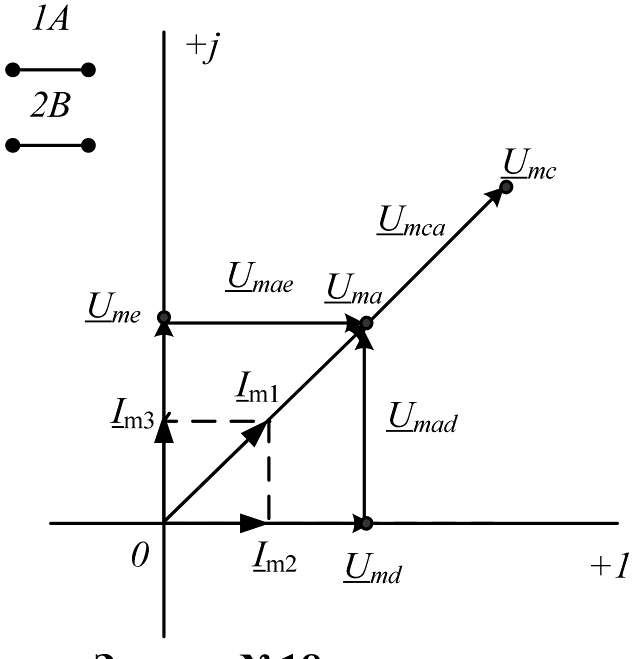
$$\underline{U}_{mb}=0,\ \underline{U}_{ma}=\underline{I}_{m2}\underline{Z}_2=\sqrt{2}\left(4+j4\right)=\sqrt{2}\cdot 4\cdot\sqrt{2}\cdot e^{j45^o}=8e^{j45^o}B,$$

$$\underline{U}_{md}=\underline{I}_{m2}R_2=\sqrt{2}\cdot 4\cdot=4\sqrt{2}\,B,$$

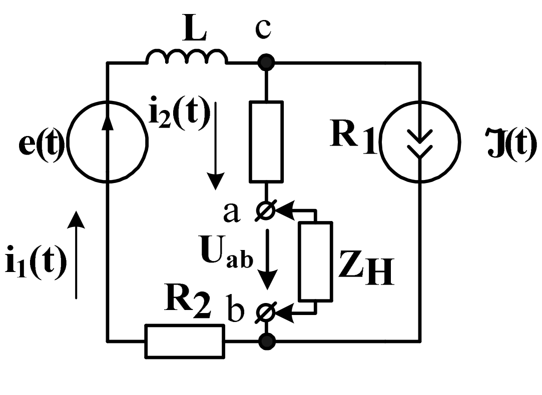
$$\underline{U}_{me}=\underline{I}_{m3}R_3=\sqrt{2}\cdot 4\cdot e^{j90^o}=j4\sqrt{2}\,B,$$

$$\underline{U}_{mc}=\underline{U}_{ma}+\underline{U}_{mca}=8e^{j45^o}+4e^{j45^o}=12e^{j45^o}B.$$

4. Строим топографическую диаграмму.



Задача №18



Дано: e(t)=8sin100t В,

J(t)=4cos100t А, R_1=R_2=4Ом,

L=40 мГн.

При каком значении $Z_н$ в нем выделяется наибольшая активная мощность. Рассчитать в этом режиме токи в цепи, проверить баланс мощностей.

Решение.

Преобразуем источник тока к функции синуса. $J(t)=4\cos 100t=4\sin(100t+90^o)\,A$. Вычисляем комплексные амплитуды источника напряжения и источника тока: $\underline{E}=8\,B$, $\underline{J}=4e^{j90^o}\,A$. Вычисляем комплексное сопротивление индуктивности $jX_L=j100\cdot 40\cdot 10^{-3}=j4\,Ом$.

Исключим сопротивление нагрузки. Получим одноконтурную цепь, в которой действует ток с комплексной амплитудой $\underline{I}_{m1}=\underline{J}_m=4e^{j90^o}\,A$. Найдем напряжение холостого хода:

$\underline{U}_{mabxx}=-\underline{I}_{m1}\cdot R_2+\underline{E}-jX_L\cdot \underline{I}_{m1}=-j4\cdot 4+8-j4\cdot j4=24-j16\,B$.

Найдем входное сопротивление эквивалентного генератора:

$\underline{Z}_{вхab}=R_1+R_2+jX_L=8+j4\ Ом$. Для согласования с генератором $\underline{Z}_н=\underline{Z}^*_{вхab}=8-j4\,Ом$.

В схеме эквивалентного генератора

$$\underline{I}_{m2}=\frac{\underline{U}_{mabxx}}{\underline{Z}_н+\underline{Z}_{вхab}}=\frac{24-j16}{16}=1{,}5-j\,A,$$

$\underline{I}_{m1}=\underline{I}_{m2}+\underline{J}_m=1{,}5+j3\,A$.

Выполним расчет баланса мощности. Комплексная мощность источников энергии:

$$\tilde{S}_{ист}=\tilde{S}_E+\tilde{S}_J=\frac{\underline{E}_m\cdot \underline{I}^*_{m1}}{2}+\frac{\underline{U}_{mbc}\cdot \underline{J}^*_m}{2}=$$

$$\frac{8\cdot(1{,}5-j3)}{2}+\frac{-\underline{I}_{m2}\cdot(R_1+\underline{Z}_H)\cdot \underline{J}^*_m}{2}=$$

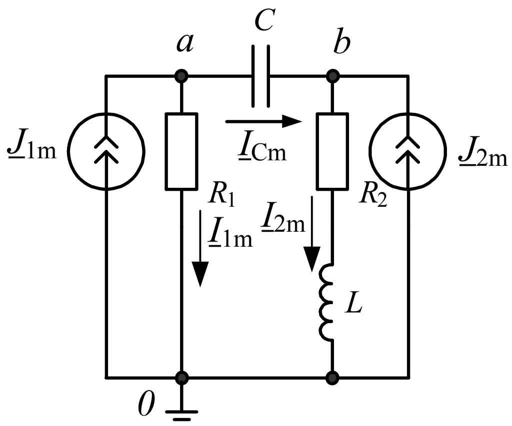
$$6-j12+\frac{(j-1{,}5)\cdot(12-j4)\cdot(-j4)}{2}=42+j16\,BA$$

Мощность потребителей:

$$P_{потр}=\frac{I_{1m}^2R_2}{2}+\frac{I_{2m}^2(R_1+R_н)}{2}=\frac{11,25\cdot 4}{2}+\frac{3,25\cdot 12}{2}=22,5+19,5=42Вт$$

$$Q_{потр}=\frac{I_{1m}^2\left(jX_L\right)}{2}+\frac{I_{2m}^2(-4j)}{2}=j22,5-j6,5=j16\,Вар$$

Задача №19



Дано:
$J_1(t)=8\sin 100t\,A,\ J_2(t)=4\cos 100t\,A.$
$R_1=R_2=4\,Ом, L=40\,мГн,$
$C=2500\,мкФ.$
Найти токи.

Решение

1. Находим комплексные амплитуды источников тока и комплексные сопротивления.

$$\underline{J}_{1m}=8\,A, \underline{J}_{2m}=4j\,A, \underline{Z}_C=-j\frac{1}{\omega C}=-j\frac{1}{100\cdot 2500\cdot 10^{-6}}=-j4\,Ом.$$

$$\underline{Z}_L=j\omega L=j100\cdot 40\cdot 10^{-3}=j4\,Ом.$$

2. Найдем ток I_{Cm} методом эквивалентного генератора. Отключаем C.

Находим:

$$\underline{U}_{mao}=\underline{J}_{1m}R_1=8\cdot 4=32\,Ом. \underline{U}_{mbo}=\underline{J}_{2m}\left(R_2+j\omega L\right)=j4\left(4+j4\right)=-16+j16\,B$$

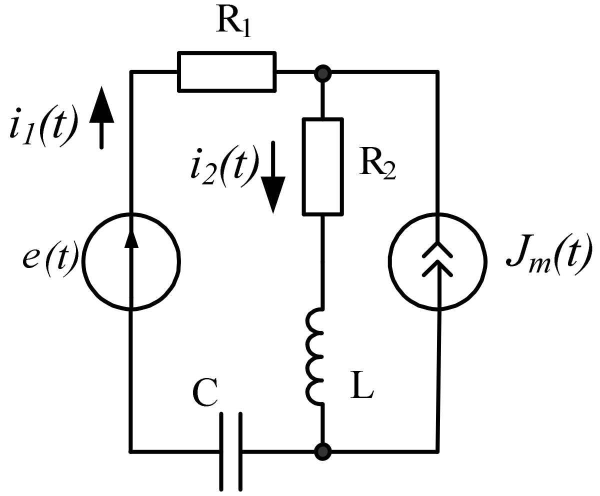
$$\underline{U}_{mabxx}=\underline{U}_{mao}-\underline{U}_{mbo}=32-\left(-16+j16\right)=48-j16\,B.$$

Входное сопротивление $\underline{Z}_{abвх}=R_1+R_1+j\omega L=8+j4\ Ом$.

$$\underline{I}_{Cm}=\frac{\underline{U}_{mabxx}}{\underline{Z}_{abвх}-j\dfrac{1}{\omega C}}=\frac{48-j16}{8+j4-j4}=6-j2\,A.$$

$\underline{I}_{1m} = \underline{J}_{1m} - \underline{I}_{Cm} = 2 + j2\,A, \underline{I}_{2m} = \underline{J}_{2m} + \underline{I}_{Cm} = j4 + 6 - j2 = 6 + j2\,A.$

Задача №20



Дано: $e(t) = 4\,\boldsymbol{sin}100t\,B$,
$J(t) = 2\,\boldsymbol{cos}100t\,A$,
$R_1 = R_2 = 2\,Ом,\ L = 20\,мГн,$
$C = 5000\,мкФ.$
Найти токи.

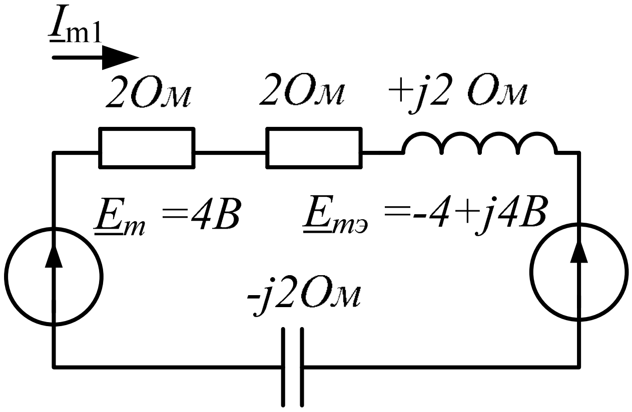
Решение.

1. Переходим к комплексным амплитудам и комплексным сопротивлениям:

$\underline{E}_m = 4\,B, \underline{J}_m = 2e^{j90^o}\,A, X_L = 2\,Ом, X_C = 2\,Ом.$

2. Преобразуем источник тока в источник напряжения:

$\underline{E}_{mэ} = \underline{J}_m\left(2 + j2\right) = 2j\left(2 + j2\right) = \left(-4 + j4\right)B.$



Находим токи:

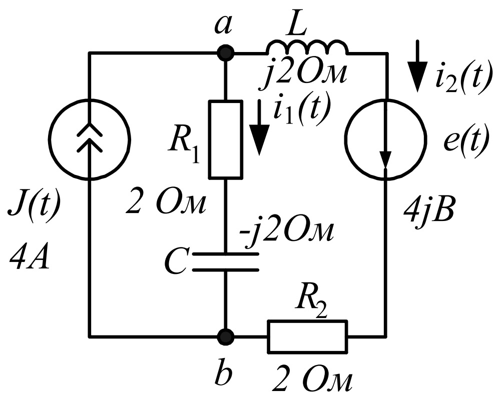
$$\underline{I}_{m1} = \frac{\underline{E}_m - \underline{E}_{mэ}}{2 + 2 + j2 - j2} = \frac{8 - j4}{4} = 2 - j1A.$$

$\underline{I}_{m2} = \underline{I}_{m1} + \underline{J}_m = 2 - j1 + j2 = 2 + j1\,A..$

3. Мгновенные значения токов:

$i_1(t) = \sqrt{5}\,\boldsymbol{sin}(100t - 26^o)\,A,\ i_2(t) = \sqrt{5}\,\boldsymbol{sin}(100t + 26^o)\,A.$

Задача №21



Дано:

$J(t) = 4\,\boldsymbol{sin}1000t\,A,$

$e(t) = 4\,\boldsymbol{cos}1000t\,B.$

$L = 2\,мГн, C = 500\,мкФ,$

$R_1 = R_2 = 2\,Ом.$

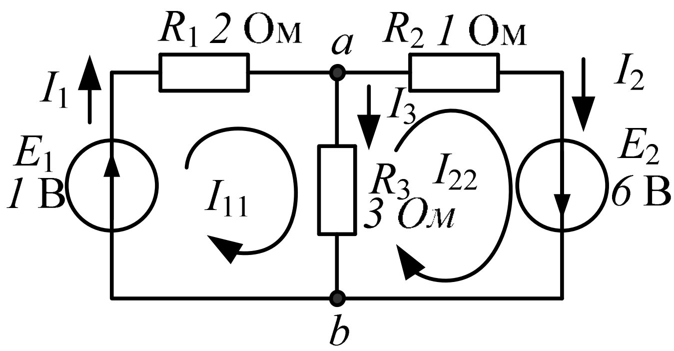
Решение методом двух узлов в Mathcad:

$$i := \sqrt{-1}$$

$$Uab := \frac{4 - \dfrac{i\cdot 4}{2 + i\cdot 2}}{\left(\dfrac{1}{2 - i\cdot 2} + \dfrac{1}{2 + i\cdot 2}\right)} = 6 - 2i \qquad Â$$

$$I1 := \frac{(6 - 2i)}{2 - 2\cdot i} \qquad I1 = 2 + i \quad À \quad I2 := 4 - I1 = 2 - i \quad À$$

Метод контурных токов



Дано: E_1=1В, E_2=6В, R_1=2Ом, R_2=1Ом, R_3=3 Ом.

Найти токи в цепи.

Составляем уравнения по МКТ:

$$\begin{aligned}&(R_1+R_3)I_{11}-R_3I_{22}=E_1\\&-R_3I_{11}+(R_2+R_3)I_{22}=E_2\end{aligned};\qquad \begin{aligned}&5I_{11}-3I_{22}=1\\&-3I_{11}+4I_{22}=6\end{aligned}.$$

Решаем систему по правилу Крамера:

$$I_{11}=\frac{\begin{vmatrix}1 & -3\\ 6 & 4\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}5 & -3\\ -3 & 4\end{vmatrix}}=\frac{4+18}{20-9}=\frac{22}{11}=2\,\text{А};\ I_{22}=\frac{\begin{vmatrix}5 & 1\\ -3 & 6\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}5 & -3\\ -3 & 4\end{vmatrix}}=\frac{30+3}{20-9}=\frac{33}{11}=3\,\text{А}$$

$$I_1=I_{11}=2\,\text{А};\ I_2=I_{22}=3\,\text{А};I_3=I_{11}-I_{22}=-1\,\text{А}.$$

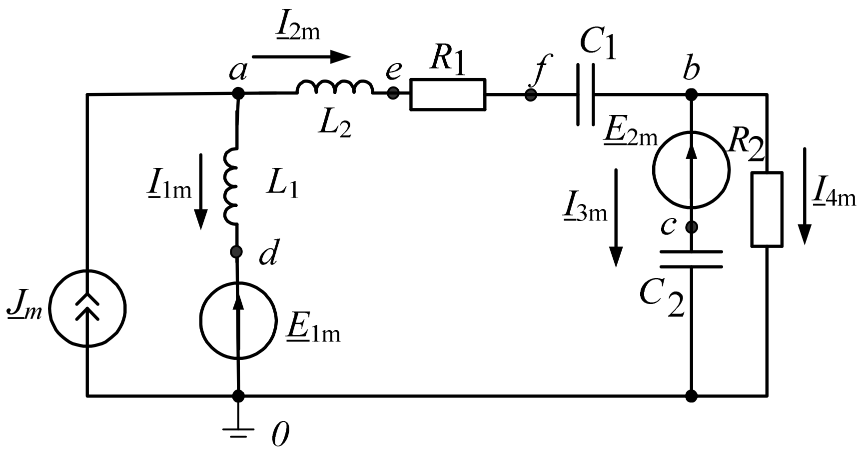
Решение по методу двух узлов

$$U_{ab}=\frac{\frac{E_1}{R_1}-\frac{E_2}{R_2}}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}}=\frac{\frac{1}{2}-6}{\frac{1}{2}+1+\frac{1}{3}}=\frac{-\frac{11}{2}}{\frac{11}{6}}=-3\,\text{В}.$$

Находим токи:

$$I_1=\frac{-U_{ab}+E_1}{R_1}=\frac{3+1}{2}=2\,\text{А},\ I_2=\frac{U_{ab}+E_2}{R_2}=\frac{-3+6}{1}=3\,\text{А},\ I_3=\frac{U_{ab}}{R_3}=\frac{-3}{3}=-1\,\text{А}.$$

Задача №22



Дано:

$$e_1(t)=10\,\boldsymbol{sin}\,\omega t\,B,\ e_2(t)=10\,\boldsymbol{sin}(\omega t-90^o)\,B,$$
$$J_1(t)=1\,\boldsymbol{sin}\,\omega t\,A,X_{L1}=20\,Ом,X_{L2}=20\,Ом,$$
$$X_{C1}=30\,Ом,X_{C2}=10\,Ом,R_1=10\,Ом,\ R_2=5\,Ом$$

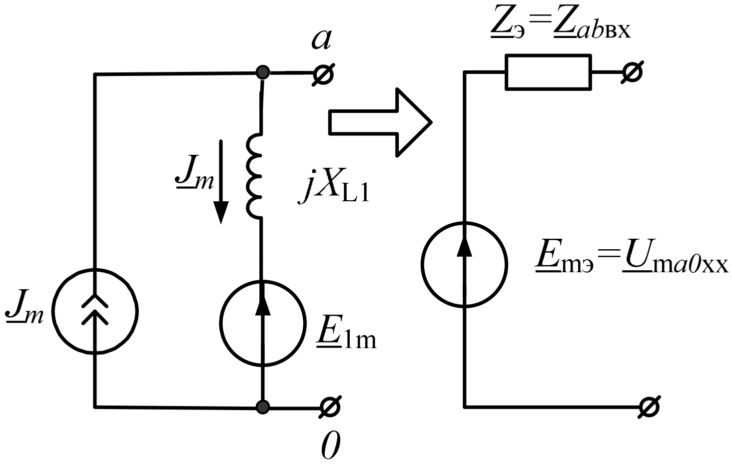
Найти токи, построить векторную топографическую диаграмму, рассчитать баланс мощности.

Решение.

1. Находим комплексные амплитуды источников:

$$\underline{E}_{1m} = 10e^{j0^o}\,B,\ \underline{E}_{2m} = 10e^{-j90^o}\,B = -j10\,B,\ \underline{J}_m = 1A.$$

2. Методом эквивалентного генератора преобразуем левую часть схемы:



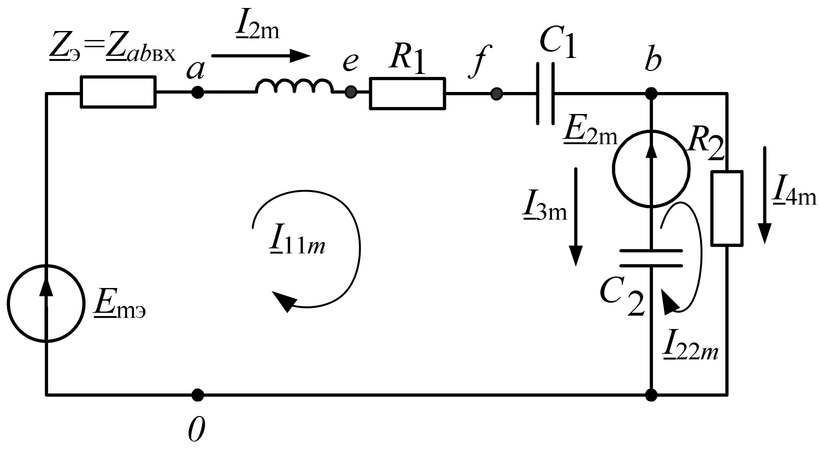
По методу двух узлов находим:

$$\underline{U}_{a0xx} = \frac{\underline{J}_m + \underline{E}_{1m}\underline{Y}_2}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2} = \frac{1 + \dfrac{10}{j20}}{0 + \dfrac{1}{j20}} = \frac{1 - 0{,}5j}{-0{,}05j} = 10 + 20j\,B.$$

$$\underline{U}_{a0xx} = \frac{\underline{J}_m + \underline{E}_{1m}\underline{Y}_2}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2} = \frac{1 + \dfrac{10}{j20}}{0 + \dfrac{1}{j20}} = \frac{1 - 0{,}5j}{-0{,}05j} = 10 + 20j\,B.$$

$\underline{Z}_э = jX_{L1} = j20\,Ом.$

3. Получим двухконтурную схему:



Находим контурные токи по МКТ:

$$\underline{I}_{11m}\underline{Z}_{11}+\underline{I}_{22m}\underline{Z}_{12}=\underline{E}_{mэ}-\underline{E}_{2m},$$
$$\underline{I}_{11m}\underline{Z}_{21}+\underline{I}_{22m}\underline{Z}_{22}=\underline{E}_{2m}$$

где:

$\underline{Z}_{11}=\underline{Z}_э+jX_{L2}+R_1-jX_{C1}-jX_{C2}=j20+j20+10-j30-j10=10\,Ом.$

$\underline{Z}_{12}=\underline{Z}_{21}=-(-jX_{C2})=+j10\,Ом.$

$\underline{Z}_{22}=R_2-jX_{C2}=5-j10\,Ом.$

Получим уравнения:

$10\underline{I}_{11m}+j10\underline{I}_{22m}=10+j20+j10=10+i30.$

$+j10\underline{I}_{11m}+(5-j10)\underline{I}_{22m}=-j10.$

$$\underline{I}_{11m}=\frac{\begin{vmatrix}10+j30 & j10\\ -j10 & 5-j10\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}10 & j10\\ j10 & 5-j10\end{vmatrix}}=1+j\,A.\quad \underline{I}_{22m}=\frac{\begin{vmatrix}10 & 10+j30\\ j10 & -j10\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}10 & j10\\ j10 & 5-j10\end{vmatrix}}=2\,A.$$

$\underline{I}_{2m}=\underline{I}_{11m}=1+j\,A,\ \underline{I}_{4m}=\underline{I}_{22m}=2A.\ \underline{I}_{3m}=\underline{I}_{11m}-\underline{I}_{22m}=1+j-2=-1+j\,A.$

$\underline{I}_{1m}=\underline{J}_m-\underline{I}_{2m}=1-1-j=-j\,A.$

4. Решение методом двух узлов.

В преобразованной схеме (п.3) находим сопротивления ветвей:

$\underline{Z}_1=\underline{Z}_э+jX_{L2}+R_1-jX_{C1}=j20+j20+10-j30=10+j10\,Ом;$

$\underline{Z}_2=-j10\,Ом;\ \underline{Z}_3=5\,Ом.$

Находим напряжение в узле b:

$$\underline{U}_{mbo} = \frac{\underline{E}_{mэ}\underline{Y}_1 + \underline{E}_{2m}\underline{Y}_2}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3} = \frac{\dfrac{10+j20}{10+j10} + \dfrac{-j10}{-j10}}{\dfrac{1}{10+j10} + \dfrac{1}{-j10} + \dfrac{1}{5}} = 10\,B\,.$$

Находим токи в ветвях:

$$\underline{I}_{2m} = \frac{\underline{E}_{mэ} - \underline{U}_{mbo}}{\underline{Z}_1} = \frac{j20}{10+j10} = 1 + j\,A.\ \underline{I}_{3m} = \frac{\underline{U}_{mbo} - \underline{E}_{2m}}{-jX_{C2}} = \frac{10+j10}{-j10} = 1 + j\,A.$$

$$\underline{I}_{4m} = \frac{\underline{U}_{mbo}}{R_2} = 2\,A.\ \underline{I}_{1m} = \underline{J}_m - \underline{I}_{2m} = -jA.$$

5. Строим векторную топографическую диаграмму.

Рассчитываем комплексные амплитуды потенциалов в точках цепи:

$$\underline{\varphi}_0 = 0, \underline{\varphi}_{bm} = \underline{I}_{4m}R_4 = 2\cdot 5 = 10\,B, \underline{\varphi}_{cm} = \underline{I}_{3m}(-jX_{C2}) = (-1+j)\cdot(-j10) = 10 + j10\,B,$$

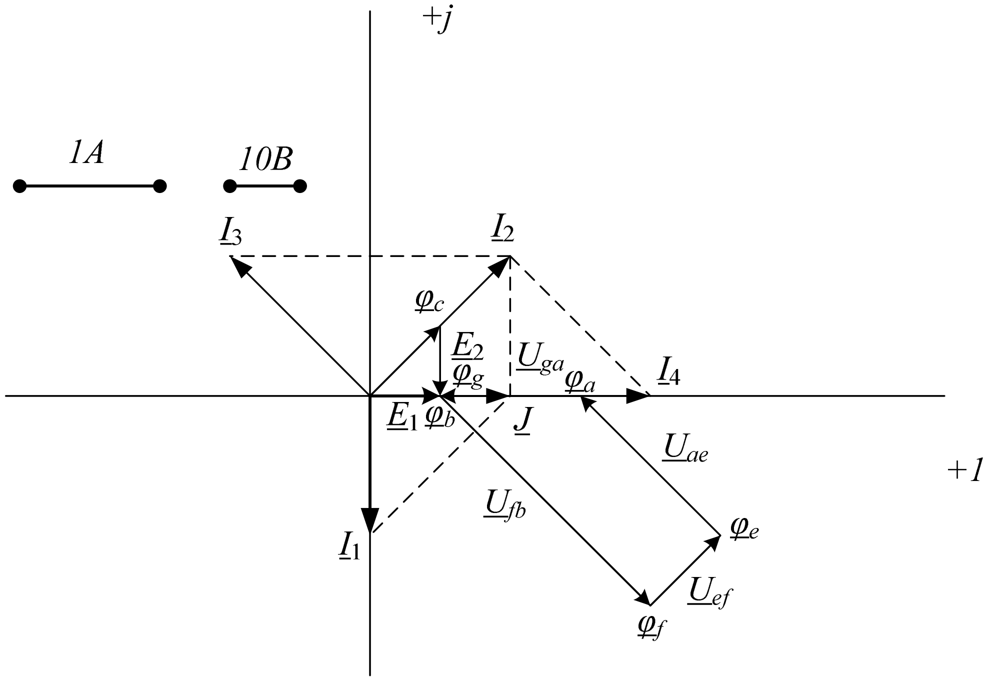
$$\underline{\varphi}_{fm} = \underline{\varphi}_{bm} + \underline{I}_{2m}(-jX_{C1}) = 10 + (1+j)(-j30) = 40 - j30\,B,$$

$$\underline{\varphi}_{em} = \underline{\varphi}_{bm} + \underline{I}_{2m}R_1 = 40 - j30 + 10 + j10 = 50 - j20\,B,$$

$$\underline{\varphi}_{am} = \underline{\varphi}_{em} + \underline{I}_{2m}(+j20) = 50 - j20 + j20 - 20 = 30B,$$

$$\underline{\varphi}_{gm} = \underline{\varphi}_{am} - \underline{I}_{1m}(+j20) = 30 - (-j)(j20) = 30 - 20 = 10B\,.$$

Выбираем масштабы по току и напряжению и строим векторную топографическую диаграмму.



По диаграмме проверяем выполнение законов Кирхгофа для токов и напряжений, правильность ориентаций векторов токов и напряжений на элементах цепи.

6. Расчет баланса мощности.

Мощность источников:

$$\tilde{S}_{ucm} = \underline{U}\underline{I}^* = \sum\left(\frac{\underline{E}_{km}\underline{I}_{km}^*}{2} + \frac{\underline{U}_{km}\underline{J}_{km}^*}{2}\right) = -\frac{\underline{E}_{1m}\underline{I}_{1m}^*}{2} - \frac{\underline{E}_{2m}\underline{I}_{3m}^*}{2} + \frac{\underline{U}_{a0}\underline{J}_m^*}{2} =$$

$$= -\frac{10j}{2} - \frac{(-10j)(-1-j)}{2} + \frac{30\cdot 1}{2} = 20 - 10j = P_{ucm} + jQ_{ucm}.$$

Мощность потребителей:

$$\sum P_{nomp.} = \frac{I_{2m}^2 R_1}{2} + \frac{I_{4m}^2 R_2}{2} = \frac{(\sqrt{2})^2\cdot 10}{2} + \frac{2^2\cdot 5}{2} = 20\,Bm.$$

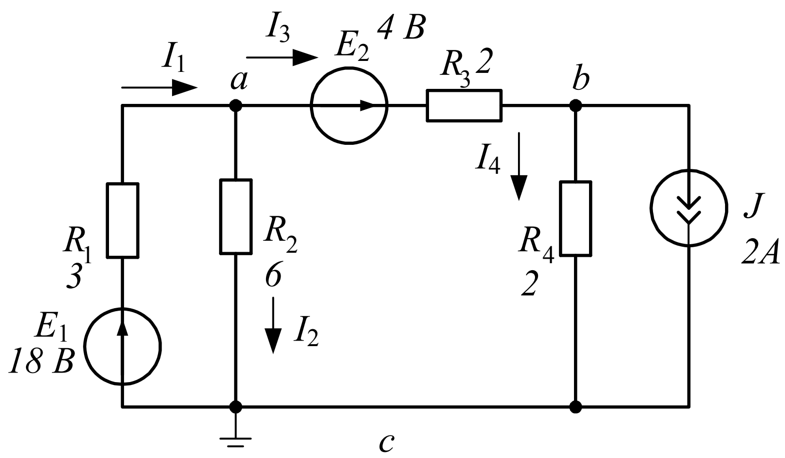
$$\sum Q_{nomp.} = \frac{I_{1m}^2 X_{L1}}{2} + \frac{I_{2m}^2\left(X_{L2} - X_{C1}\right)}{2} - \frac{I_{3m}^2 X_{C2}}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 20 + \frac{\left(\sqrt{2}\right)^2}{2}\left(20-30\right) - \frac{\left(\sqrt{2}\right)^2}{2}\cdot 10 = 10 - 10 - 10 = -10\,Bap.$$

$$\tilde{S}_{nomp} = P_{nomp.} + jQ_{nomp.} = 20 - j10 = \tilde{S}_{ucm}.$$

Баланс выполняется.

Задача №23



Дано: E1=18 В, E2=4В, J=2А, R1=3 Ом, R2=6 Ом, R3=2 Ом, R4=4 Ом.

Найти токи методом узловых напряжений.

Каноническая система уравнений:

$$\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\right)U_a-\frac{1}{2}U_b=\frac{18}{3}-\frac{4}{2}=4$$

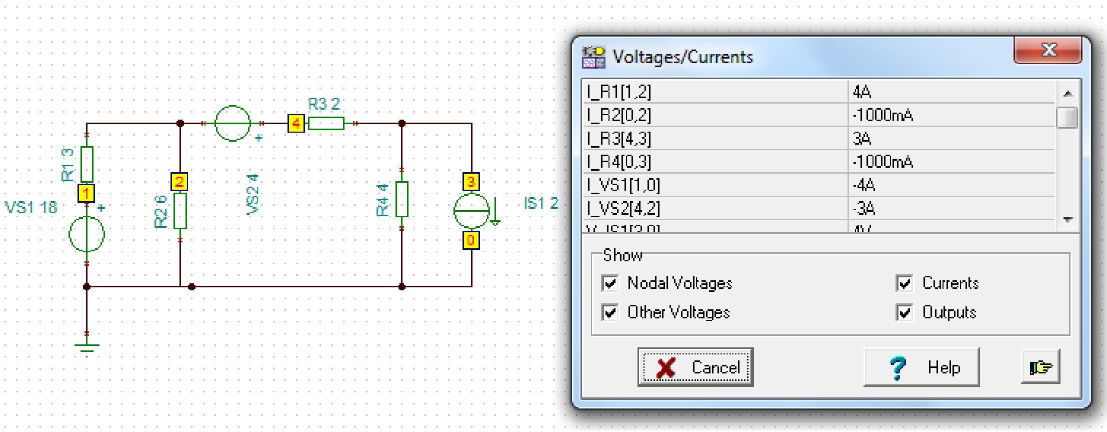
$$-\frac{1}{2}U_a+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)U_b=\frac{4}{2}-2=0$$

$$U_a-\frac{1}{2}U_b=4$$

$$-U_a+\frac{3}{2}U_b=0$$

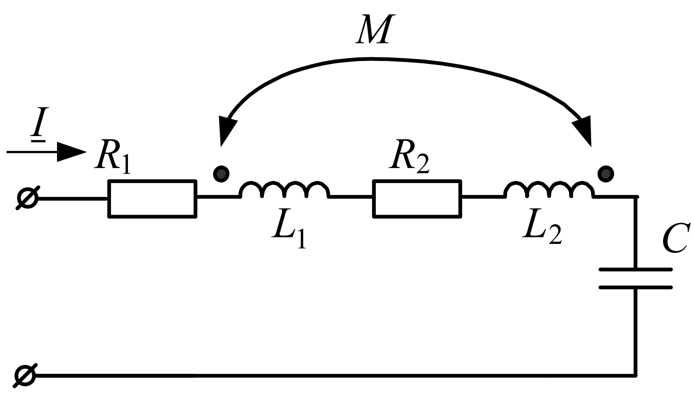
$$U_b=4B,\ U_a=\frac{3}{2}U_b=6B.$$

$$I_1=\frac{18-6}{3}=4A, I_2=\frac{6}{6}=1A, I_3=\frac{6-4+4}{2}=3A, I_4=\frac{4}{4}=1A$$



Цепи с магнитной связью

Задача №24



Дано: R_1=60 Ом, R_2=10 Ом, L_1=0,8 мГн, L_2=0,4 мГн, M=0,1 мГн, $\omega=10^6$ 1/c.

При каком значении емкости C в цепи наступит резонанс?

Решение

1. Катушки индуктивности включены встречно. Находим эквивалентную индуктивность:

$$L_{экв} = L_1 + L_2 - 2M = 0{,}8 + 0{,}4 - 0{,}2 = 1\,мГн.$$

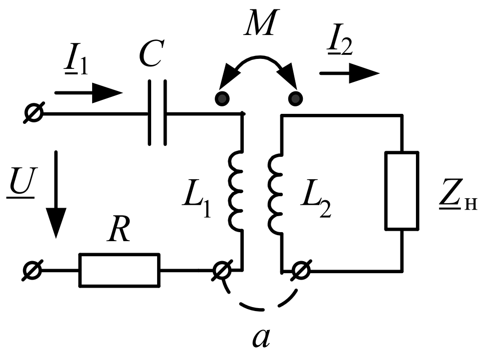
2. При резонансе на заданной частоте X_C=$X_{Lэкв}$:

$$\frac{1}{\omega C} = \omega L_{экв}.$$

Отсюда находим:

$$C = \frac{1}{\omega^2 L_{экв}} = \frac{1}{\omega^2 L_{экв}} = \frac{1}{10^{12} \cdot 10^{-3}} = 10^{-9} = 1\,нФ.$$

Задача №25



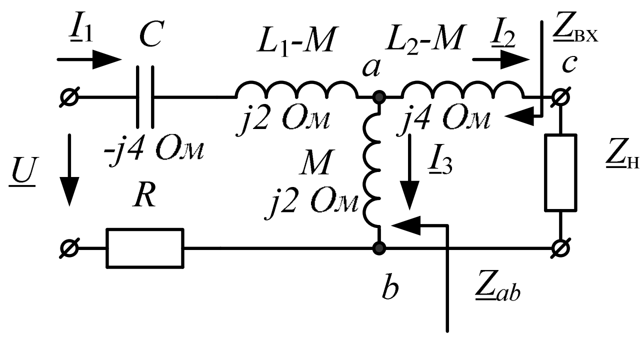
Дано: U_1=10 В, X_{L1}=4 Ом, X_{L2}=6 Ом, X_C=4 Ом, X_M=2 Ом, R=2 Ом.

При каком $\underline{Z}_н$ в нем выделяется максимальная мощность?

Рассчитать токи I1 и I2 и мощность Pн.

Решение

1. Нижние выводы катушек индуктивности можно соединить. При этом токи в цепи не изменятся. Заменим трансформатор схемой замещения. Так как одноименные выводы катушек одинаково расположены относительно нижнего узла *a* получим эквивалентную схему:



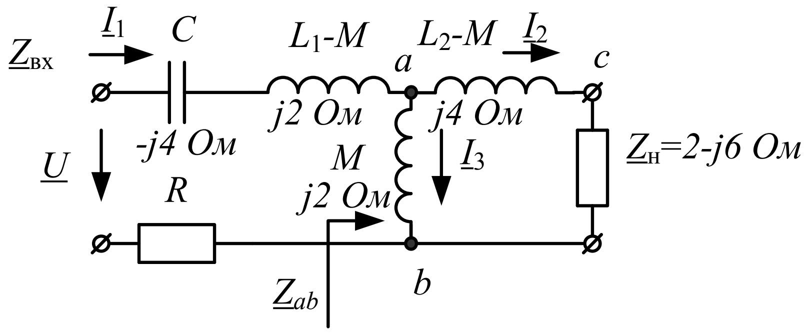
2. Оптимальное сопротивление нагрузки равно комплексно-сопряженному сопротивлению эквивалентного генератора, заменяющего основную схему слева от зажимов cb.

Найдем при отключенной нагрузке:

$$\underline{Z}_{ab} = \frac{j2(2-j2)}{2+j2-j2} = \frac{4+j4}{2} = 2+j2\,Ом,$$

$$\underline{Z}_{вх} = \underline{Z}_{ab} + j4 = 2+j6\,Ом,\ \underline{Z}_{н\,опт} = \overset{*}{\underline{Z}}_{вх} = 2-j6\,Ом\ .$$

3. Расчет токов при включенной оптимальной нагрузке.



$$\underline{Z}_{ab} = \frac{j2(2-j6+j4)}{2-j6+j4+j2} = \frac{(2-j2)j2}{2} = 2+j2\,Ом$$

.

$$\underline{I}_1 = \frac{10}{2-j2+2+j2} = \frac{10}{4} = 2{,}5\,A$$

$$\underline{U}_{ab} = \underline{I}_1(2+j2) = 5+j5\,B,$$

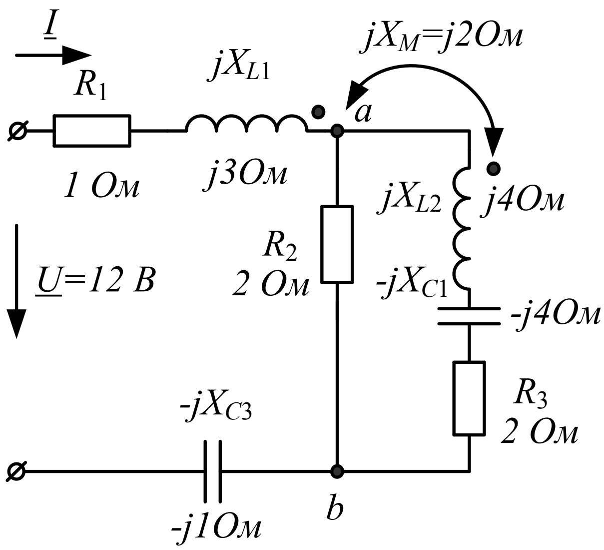
$$\underline{I}_3 = \frac{5+j5}{j2} = 2{,}5-j2{,}5\,A;$$

$$\underline{I}_2 = \frac{5+j5}{2-j2} = \frac{5}{2}\cdot\frac{1+j}{1-j} = \frac{5}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}e^{j45^o}}{\sqrt{2}e^{-j45^o}} = 2{,}5j\,A.$$

4. Расчет мощность в нагрузке:

$$P_н = I_2^2 R_н = (2{,}5)^2 2 = 12{,}5\,Вт.$$

Задача № 26

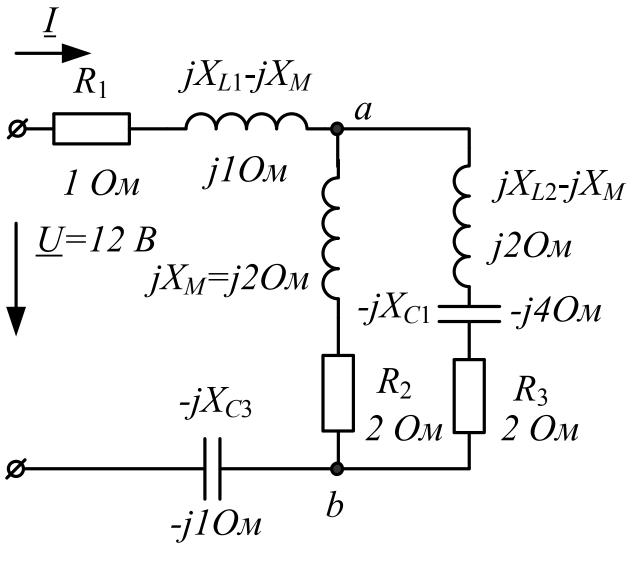


Параметры цепи заданы на символической схеме замещения.

Найти входной ток.

Решение.

1. Выполним развязку магнитно-связанных катушек. Одноименные зажимы катушек одинаково расположены относительно узла «а». Поэтому после развязки получим схему:



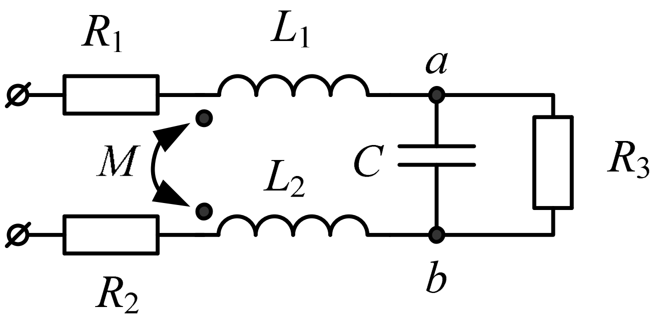
2. Найдем эквивалентное сопротивление параллельных ветвей:

$$\underline{Z}_{ab} = \frac{(2+j2)(2-j2)}{2+j2+2-j2} = \frac{4+4}{4} = 2Ом.$$

Входное сопротивление: $\underline{Z}_{вх} = \underline{Z}_{ab} + 1 + j1 + 2 - j1 = 3Ом$.

Входной ток: $\underline{I} = \dfrac{\underline{U}}{\underline{Z}_{вх}} = \dfrac{12}{3} = 4A$.

Задача №27



Дано: $\omega=10^4$1/с, L_1=1,2 мГн, L_2=1,6 мГн, С=2,5 мкФ, $R_1=R_2$=5 Ом, R_3=40 Ом.
При каком M в цепи наступит резонанс?

Решение

1. Найдем эквивалентное сопротивление параллельного соединения $\underline{Z}_{ab}$.

Реактивное сопротивление емкости:

$$X_C=\frac{1}{\omega C}=\frac{1}{10^4\cdot 2{,}5\cdot 10^{-6}}=40\,Ом\,.$$

$$\underline{Z}_{ab}=\frac{-jX_C R_3}{R_3-jX_C}=\frac{-j40\cdot 40}{40-j40}=20-j20=R_Э-jX_{CЭ}\,.$$

2. Условие резонанса: $\omega L_{экв}=X_{CЭ}=20\,Ом$;

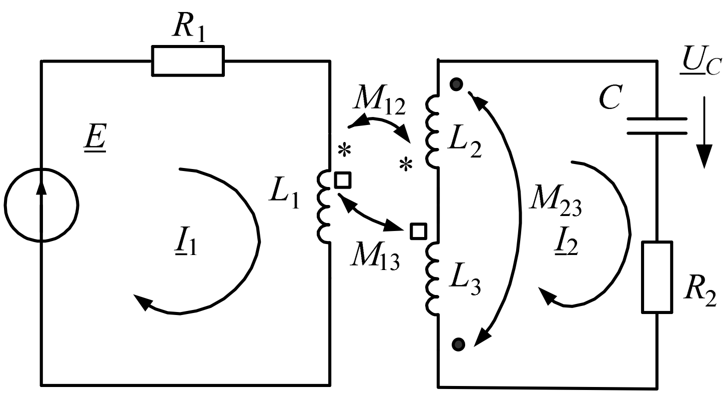
$$L_{экв}=\frac{20}{\omega}=\frac{20}{10^4}=2\cdot 10^{-3}\,Гн^{\cdot}$$

3. Находим М:

Эквивалентная индуктивность при встречном включении двух катушек: $L_{экв}=L_1+L_2-2M=2\,мГн$.

$$M=\frac{(1{,}2+1{,}6-2)\cdot 10^{-3}}{2}=0{,}4\,мГн\,.$$

Задача №45



Дано: E=45 В, R_1=10 Ом, R_2=10 Ом, X_{L1}=10 Ом, X_{L2}=20 Ом, X_{L3}=30 Ом, X_C=40 Ом, X_{M12}=15 Ом, X_{M13}=10 Ом, X_{M23}= Ом. Найти токи в катушках и напряжение на емкости.

Решение

1. Выбираем направления обхода контуров и составляем уравнения по второму закону Кирхгофа. Если направление обхода катушки i и ток в катушке k одинаково направлены относительно одноименных зажимов, напряжение взаимной индукции входит в уравнения Кирхгофа со знаком плюс. В противном случае – со знаком минус.

1-й контур: $R_1\underline{I}_1 + jX_{L1}\underline{I}_1 + jX_{M12}\underline{I}_2 - jX_{M13}\underline{I}_2 = \underline{E}$;

2-й контур: $R_2\underline{I}_2 - jX_{C2}\underline{I}_2 + jX_{L3}\underline{I}_2 - jX_{M23}\underline{I}_2 - jX_{M13}\underline{I}_1 +$
$+ jX_{L2}\underline{I}_2 + jX_{M12}\underline{I}_1 - jX_{M23}\underline{I}_2 = 0$.

Подставим значения параметров и получим систему уравнений:

$$\begin{cases}(10 + j10)\underline{I}_1 + j5\underline{I}_2 = 45\\ j5\underline{I}_1 + (10 - j10)\underline{I}_2 = 0\end{cases}$$

Из второго уравнения: $\underline{I}_2 = -\dfrac{j5\underline{I}_1}{(10 - j10)}$.

Подставим в первое уравнение:

$(10 + j10)\underline{I}_1 + j5(-\dfrac{j5\underline{I}_1}{(10 - j10)}) = 45$;

$225\underline{I}_1 = 450 - j450$.

Получим ответы:

$\underline{I}_1 = 2 - j2\,A$, $\underline{I}_2 = -j1A$, $U_C = X_C I_2 = 40\,B$.

Расчет токов и напряжения $\underline{U}_C$ проведем в Mathcad.

Задаем значения параметров цепи:

$$E := 45 \quad R1 := 10 \quad R2 := 10 \quad XL1 := 10$$

$$XL2 := 20 \quad XL3 := 30 \quad XC := 40$$

$$XM12 := 15 \quad XM13 := 10 \quad XM23 := 10$$

Составляем уравнения по второму закону Кирхгофа:

$$i := \sqrt{-1}$$

Given

1 к: $I1 \cdot R1 + i \cdot XL1 \cdot I1 + i \cdot XM12 \cdot I2 - i \cdot XM13 \cdot I2 = E$

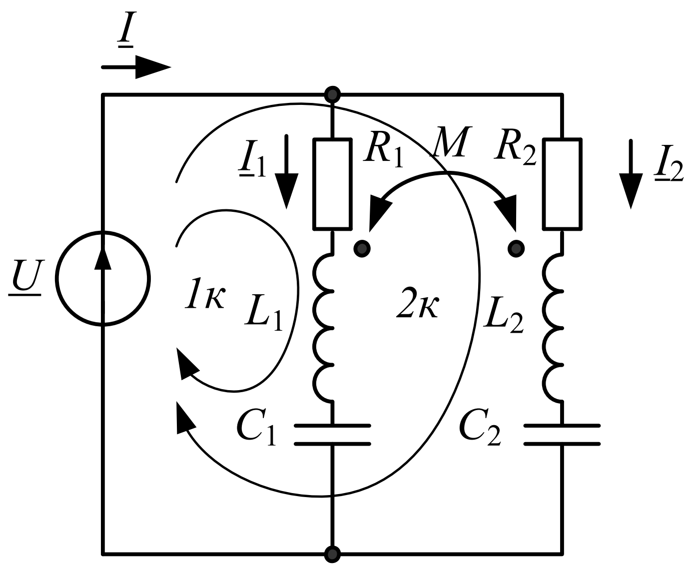
2 к: $I2 \cdot R2 - i \cdot XC \cdot I2 + i \cdot XL3 \cdot I2 - i \cdot XM23 \cdot I2 -$
$- i \cdot XM13 \cdot I1 + i \cdot XL2 \cdot I2 + i \cdot XM12 \cdot I1 - i \cdot XM23 \cdot I2 = 0$

$$\begin{pmatrix} I1 \\ I2 \end{pmatrix} := \mathrm{Find}(I1, I2)\ \mathrm{float}, 4 \ \rightarrow \begin{pmatrix} 2.0 - 2.0i \\ -1.0i \end{pmatrix}$$

$$UC := -i \cdot XC \cdot I2 = -40$$

Получены ответы:
I_1=2-j2 А, I_2=-j1А, U_C=-40В.

Задача №28



Дано: $\underline{U}$=150 В, X_{L1}=8 Ом, X_{L2}= 15 Ом, X_{C1}=8 Ом, X_{C2}=15 Ом, X_M= 10 Ом, R_1=5 Ом, R_2=10 Ом.

Найти токи и рассчитать баланс активной мощности.

Решение

1. Составляем уравнения по второму закону Кирхгофа для расчета токов:

1-й контур:

$R_1\underline{I}_1 + jX_{L1}\underline{I}_1 + jX_M\underline{I}_2 - jX_{C1}\underline{I}_1 = \underline{U}$;

$R_2\underline{I}_2 + jX_{L2}\underline{I}_2 + jX_M\underline{I}_1 - jX_{C2}\underline{I}_2 = \underline{U}$.

Подставим значения параметров:

$$\begin{cases} 5\underline{I}_1 + j10\underline{I}_2 = 150 \\ j10\underline{I}_1 + 10\underline{I}_2 = 150 \end{cases}.$$

Умножим первое уравнение на $j2$ и вычтем из него второе уравнение. Получим:

$$30\underline{I}_2 = 150 - j300\,A\ ,\ \underline{I}_2 = 5 - j10\,A = 11{,}2e^{-j63^o}\,A.$$

Умножим второй уравнение на j и вычтем из первого:

$$\underline{I}_1 = 150 - j150,\ \ \underline{I}_1 = 10 - j10\,A = 10\sqrt{2}e^{j45^o}\,A.$$

Находим ток в источнике напряжения:

$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = 15 - j20\,A$.

2. Находим активные мощности в ветвях цепи:

$$P_1 = \boldsymbol{Re}\left[\underline{U}\cdot\underline{I}_1^*\right] = \boldsymbol{Re}\left[150(10 + j10)\right] = 1500\,Вт\ ,$$

$$P_2 = \boldsymbol{Re}\left[\underline{U}\cdot\underline{I}_2^*\right] = \boldsymbol{Re}\left[150(5 + j10)\right] = 750\,Вт.$$

3. Находим активную мощность источника:

$$P_U = \boldsymbol{Re}\left[\underline{U}\cdot\underline{I}^*\right] = \boldsymbol{Re}\left[150(15 + j20)\right] = 2250 = P_1 + P_2.$$

4. Найдем мощность, выделяемую в виде тепла в ветвях:

$$P_{R1} = I_1^2R_1 = 5\cdot\left(10\sqrt{2}\right)^2 = 5\cdot 200 = 1000\,Вт.$$

$$P_{R2} = I_2^2R_2 = 10\cdot(11{,}2)^2 = 1250\,Вт.$$

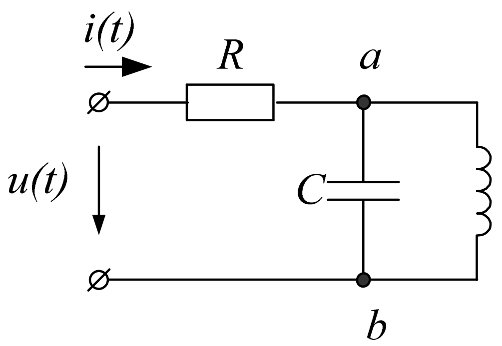
5. Обратим внимание на то, что активная мощность первой ветви P_1 на 500 Вт больше, чем мощность P_{R1}, выделяемая в первой ветви в виде тепла. Это означает, что часть активной мощности передается из первой катушки во вторую через магнитное поле. Передаваемая во вторую катушку комплексная мощность равна:

$$\tilde{S}_{2M} = \underline{E}_{2M} \cdot \overset{*}{\underline{I}_2} = \left(jX_M \underline{I}_1\right) \cdot \left(5 + j10\right) = j10\left(10 - j10\right)\left(5 + j10\right) =$$
$$= \left(100 + j100\right)\left(5 + j10\right) = 500 + j500 + j1000 - 1000 = -500 + j1500\,BA\,.$$

Активная мощность $P_{M2} = -500\,Вт$ отрицательна. Следовательно, эта мощность подводится во вторую катушку из первой через магнитное поле. Активная мощность, отдаваемая первой катушкой во вторую $P_{M1} = -P_{M2} = 500\,Вт$. В результате получаем:

$$P_1 = P_{R1} + P_{M1} = 1000 + 500 = 1500\,Вт\,,$$
$$P_2 = P_{R2} + P_{M2} = 1250 - 500 = 750\,Вт\,.$$

Задача №29



Дано:

$$u(t) = 40 + 80\,\boldsymbol{sin}\,10^3 t + 40\,\boldsymbol{sin}\left(2 \cdot 10^3 t + 45^o\right)$$
$$L = 10\,мГн, C = 50\,мкФ, R = 20\,Ом\,.$$

Найти действующее значение тока, активную, реактивную и полную мощность.

Решение

1. На постоянном токе: $I_0 = \dfrac{U_0}{R} = \dfrac{40}{20} = 2A\,.$

2. На первой гармонике $\omega = 10^3\ {}^{1}\!/_{c}$:

$$X_{L(1)} = \omega L = 10^3 \cdot 10^{-2} = 10\,Ом\,,$$

$$X_{C(1)} = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{10^3 \cdot 50 \cdot 10^{-6}} = 20\,Ом\,.$$

$$\underline{Z}_{ab(1)} = \frac{j10(-j20)}{j10 - j20} = \frac{200}{-j10} = j20\,Ом\,.$$

$$\underline{Z}_{вх(1)} = R + j\underline{Z}_{ab(1)} = 20 + j20\,Ом\,.$$

$$\underline{I}_{m(1)} = \frac{80}{20\sqrt{2}e^{j45^o}} = \frac{4}{\sqrt{2}}e^{-j45^o}\,A\,.$$

Мгновенное значение первой гармоники тока: $i_{(1)}(t)=\frac{4}{\sqrt{2}}\sin\left(10^3 t-45^0\right)$ А.

3. Расчет на второй гармонике $2\omega=2\cdot10^3\ {}^1\!/_c$:

$$X_{L(2)}=2\omega L=2\cdot10^3\cdot10^{-2}=20\,Ом,$$

$$X_{C(2)}=\frac{1}{2\omega C}=\frac{1}{2\cdot10^3\cdot50\cdot10^{-6}}=10\,Ом,$$

$$\underline{Z}_{ab(2)}=\frac{j20(-j10)}{j20-j10}=\frac{200}{j10}=-j20\,Ом,$$

$$\underline{Z}_{вх(2)}=R+j\underline{Z}_{ab(2)}=20-j20\,Ом,$$

$$\underline{I}_{m(2)}=\frac{40e^{j45^o}}{20\sqrt{2}e^{-j45^o}}=\frac{2}{\sqrt{2}}e^{j90^o}\,A.$$

Мгновенное значение второй гармоники тока: $i_{(2)}(t)=\frac{2}{\sqrt{2}}\sin\left(2\cdot10^3 t+90^0\right)$ А.

4. Полный ток:

$$i(t)=I_0+i_{(1)}(t)+i_{(2)}(t)=2+\frac{4}{\sqrt{2}}\sin\left(10^3 t-45^0\right)+$$

$$+\frac{2}{\sqrt{2}}\sin\left(2\cdot10^3 t+90^0\right)\text{А}.$$

5. Действующее значение тока:

$$I_д=\sqrt{I_0^2+\frac{I_{m(1)}^2}{2}+\frac{I_{m(2)}^2}{2}}=\sqrt{2^2+\frac{16}{2\cdot2}+\frac{4}{2\cdot2}}=\sqrt{4+4+1}=3\,A.$$

Действующее значение напряжения:

$$U_д=\sqrt{U_0^2+U_{(1)}^2+U_{(2)}^2}=\sqrt{40^2+\frac{80^2}{2}+\frac{40^2}{2}}=74{,}8\,B.$$

6. Активная мощность источников:

$$P=P_0+P_1+P_2=U_0I_0+U_1I_1\cos\varphi_1+U_2I_2\cos\varphi_2=$$

$$=40\cdot 2+\frac{80}{\sqrt{2}}\cdot\frac{4}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}\boldsymbol{cos}\left(-45^o\right)+\frac{40}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}\boldsymbol{cos}\left(45^o-90^o\right)=$$

180 Вт.

Активная мощность в резисторах:

$$P_R=I_0^2R+\frac{I_{m(1)}^2}{2}R+\frac{I_{m(2)}^2}{2}R=I_д^2R=20\cdot 9=180\,Bm.$$

7. Реактивная мощность:

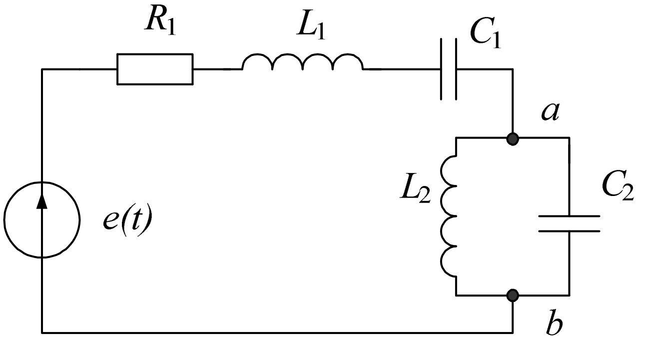
$$Q=U_1I_1\,\boldsymbol{sin}\,\varphi_1+U_2I_2\,\boldsymbol{sin}\,\varphi_2=$$

$$=\frac{80}{\sqrt{2}}\cdot\frac{4}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}\boldsymbol{sin}\left(-45^o\right)+\frac{40}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}\boldsymbol{sin}\left(-45^o\right)=-80-20=-100\,Bap$$

8. Полная мощность: $S=U_д\cdot I_д=74{,}8\cdot 3=224{,}5\,BA$.

$$\sqrt{P^2+Q^2}=\sqrt{180^2+100^2}=205\neq S.$$

Задача №30



Дано: $e(t)=20+28\,\boldsymbol{sin}10^4t-14\,\boldsymbol{sin}\,2\cdot 10^3t$ В,

$L_1=1\,мГн, L_2=0{,}5\,мГн, C_1=5\,мкФ, R_1=10\,Ом$.

Найти активную мощность, выделяемую в цепи.

Решение

1. Так как мощность $P=I_д^2R$ будем искать действующее значение тока.

2. Расчет на постоянном токе: I_0=0.

3. Расчет на первой гармонике $\omega=10^4\ {}^{1}\!/_{c}$:

$X_{L1(1)} = \omega L_1 = 10^4 \cdot 10^{-3} = 10\,Ом$,

$X_{L2(1)} = \omega L_2 = 10^4 \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-3} = 5\,Ом$;

$X_{C1(1)} = \dfrac{1}{\omega C_1} = \dfrac{1}{10^4 \cdot 5 \cdot 10^{-6}} = 20\,Ом$,

$X_{C2(1)} = \dfrac{1}{\omega C_2} = \dfrac{1}{10^4 \cdot 10 \cdot 10^{-6}} = 10\,Ом$.

$\underline{Z}_{ab(1)} = \dfrac{j5(-j10)}{j5 - j10} = +j10\,Ом$,

$\underline{Z}_{вх(1)} = 10 + j10 - j20 + j10 = 10\,Ом$.

$I_{m(1)} = \dfrac{28}{10} = 2{,}8\,A$, $I_{д(1)} = \dfrac{2{,}8}{\sqrt{2}} = 2\,A$.

4. Расчет на второй гармонике $2\omega = 2 \cdot 10^4\ {}^1\!/_c$:

$X_{L1(2)} = 2\omega L_1 = 20\,Ом$, $X_{L2(2)} = 2\omega L_2 = 10\,Ом$,

$X_{C1(2)} = \dfrac{1}{2\omega C_1} = 10\,Ом$, $X_{C2(2)} = \dfrac{1}{2\omega C_2} = 5\,Ом$.

$\underline{Z}_{ab(2)} = \dfrac{-j5(+j10)}{-j5 + j10} = -j10\,Ом$,

$\underline{Z}_{вх(2)} = 10 + j20 - j10 - j10 = 10\,Ом$.

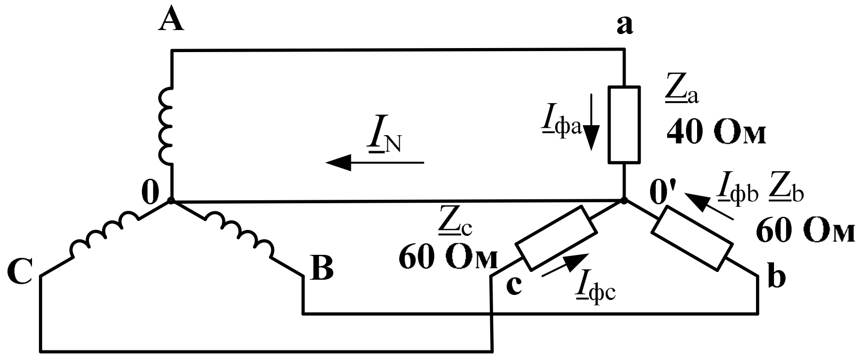
$I_{m(2)} = \dfrac{14}{10} = 1{,}4\,A$, $I_{д(2)} = \dfrac{1{,}4}{\sqrt{2}} = 1\,A$.

5. Действующий ток: $I_д = \sqrt{I_0^2 + I_{(1)}^2 + I_{(2)}^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}\,A$.

6. Активная мощность в цепи: $P = I_д^2 R = 8 \cdot 10 = 80\,Вт$.

ТРЕХФАЗНЫЕ ЦЕПИ

Задача №31



Дано: $E_ф = 120\,B, R_a = 40\,Ом, R_b = R_c = 60\,Ом.$

Построить векторную диаграмму токов и найти ток нейтрали.

Решение.

1. Находим фазные токи:

$$\underline{I}_{фa} = \frac{\underline{E}_{фa}}{R_a} = \frac{120e^{j0^o}}{40} = 3e^{j0^o}\ A,$$

$$\underline{I}_{фb} = \frac{\underline{E}_{фb}}{R_b} = \frac{120e^{-j120^o}}{60} = 2e^{-j120^o}\ A,$$

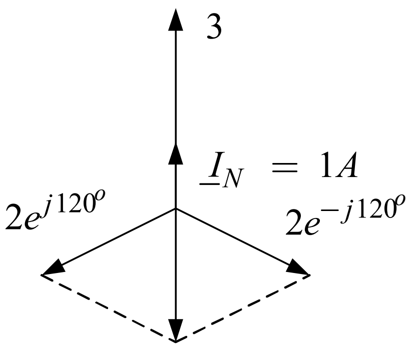
$$\underline{I}_{фc} = \frac{\underline{E}_{фc}}{R_b} = \frac{120e^{j120^o}}{60} = 2e^{j120^o}\ A.$$

Ток нейтрали:

$$\underline{I}_N = \underline{I}_{фa} + \underline{I}_{фb} + \underline{I}_{фc} = 3 + 2e^{-j120^o} + 2e^{j120^o} =$$

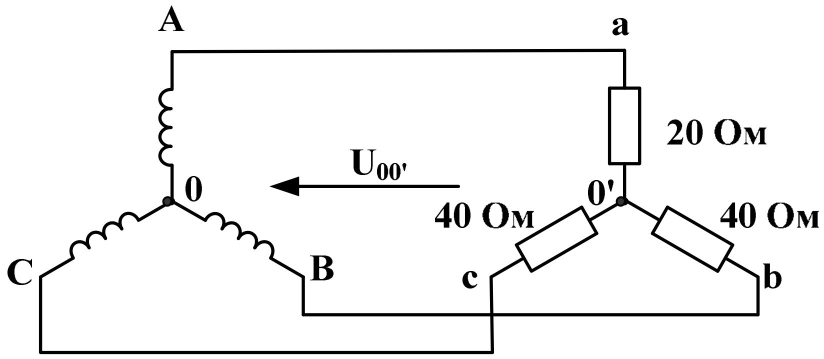
$$= 3 + 2\left(-\frac{1}{2}\right) + j2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\left(-\frac{1}{2}\right) + j2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 3 - 1 - 1 = 1A$$

.



Строим векторную диаграмму.

Задача №32



Дано: $E_ф = 120\,В, R_a = 20\,Ом, R_b = R_c = 40\,Ом.$

Найти напряжение смещения нейтрали $U_{00'}$.

Решение.

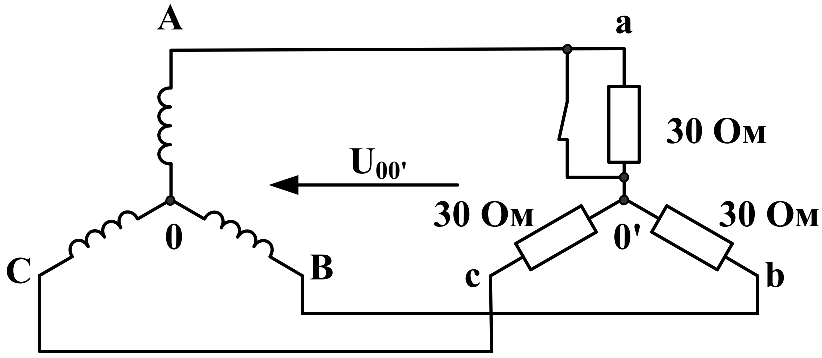
По методу двух узлов:

$$\underline{U}_{00'} = \frac{\underline{E}_{фa}G_a + \underline{E}_{фb}G_b + \underline{E}_{фc}G_c}{G_a + G_b + G_c} =$$

$$= \frac{120\cdot\frac{1}{20} + 120e^{-j120^o}\cdot\frac{1}{40} + 120e^{j120^o}\,\frac{1}{40}}{\frac{1}{20}+\frac{1}{40}+\frac{1}{40}} =$$

$$= \frac{6 + 3\left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 3\left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\frac{1}{10}} = \frac{6 - 1{,}5 - 1{,}5}{\frac{1}{10}} = 30B\,.$$

Задача №33

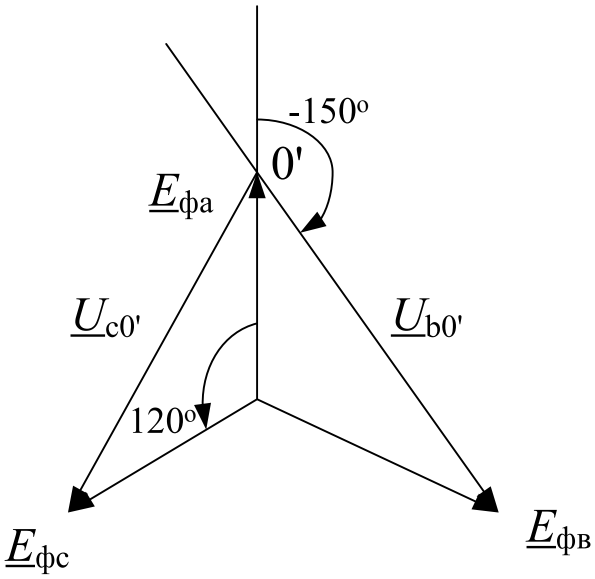


Дано: $E_ф = 127\,В, R_a = R_b = R_c = 40\,Ом.$

Произошло замыкание фазы А. Построить векторную диаграмму напряжений и найти фазные токи.

Решение

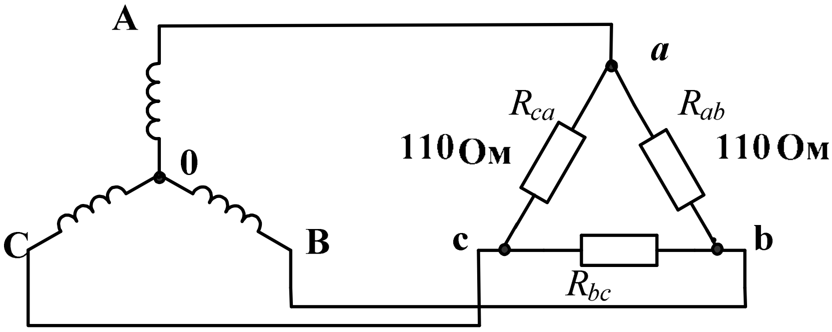
Узел 0’ соединен с фазой $\underline{E}_{фа}$.



$$\underline{I}_{фb} = \frac{\underline{U}_{b0'}}{R} = \frac{\underline{E}_{фа}\sqrt{3}e^{-j150^o}}{40} = \frac{220e^{-j150^o}}{40} = 5,5e^{-j150^o}\,A.$$

$$\underline{I}_{фc} = \frac{\underline{U}_{c0'}}{R} = \frac{\underline{E}_{фа}\sqrt{3}e^{j150^o}}{40} = \frac{220e^{j150^o}}{40} = 5,5e^{j150^o}\,A.$$

Задача №34



Дано: $E_ф = 127\,B, R_{ab} = R_{bc} = R_{ca} = 110\,Ом.$

Найти линейные токи.

Решение.

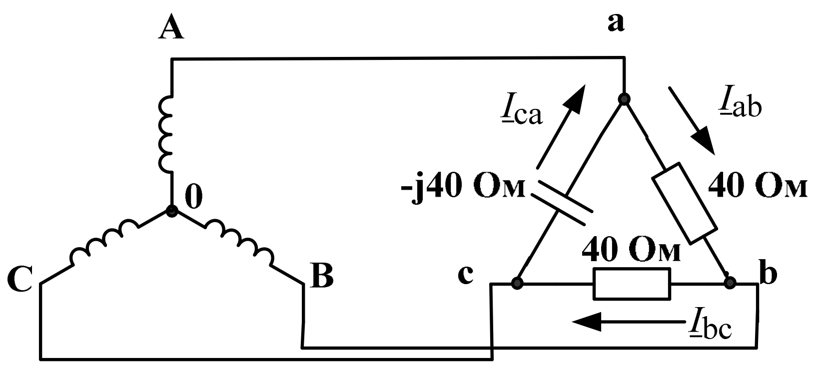
Нагрузка включена треугольником. Находим действующие линейные напряжения:

$$U_л = U_{ab} = U_{bc} = U_{ca} = \sqrt{3}E_ф = \sqrt{3}\cdot 127 = 220\,B.$$

Фазные токи: $I_{ab} = \dfrac{U_{ab}}{R_{ab}} = \dfrac{220}{110} = 2A = I_{bc} = I_{ca}$.

Линейные токи: $I_л = \sqrt{3}I_ф = 2\sqrt{3}A$.

Задача №35



Дано: $E_ф$=127 В. Построить векторную диаграмму токов и напряжений. Найти активную и реактивную мощность в цепи.

Решение.

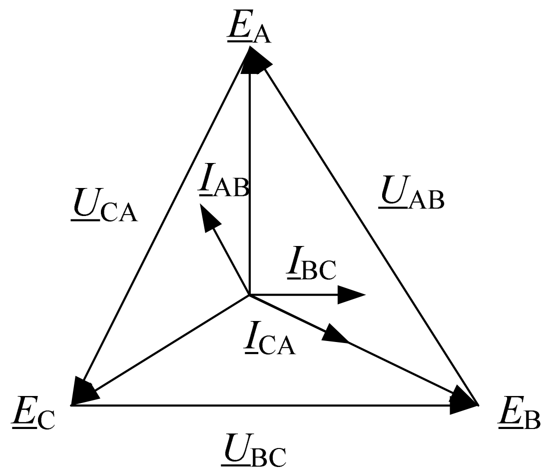
1. Фазные нагрузки подключены к линейным напряжениям. Найдем фазные токи:

$$\underline{I}_{ab} = \frac{\underline{U}_{ab}}{40} = \frac{\underline{E}_a - \underline{E}_b}{40} = \frac{127\sqrt{3}e^{j30^o}}{40} = 5{,}5\,e^{j30^o}\,A,$$

$$\underline{I}_{bc} = \frac{\underline{U}_{bc}}{40} = \frac{220e^{-j90^o}}{40} = 5{,}5\,e^{-j90^o}\,A\ ,$$

$$\underline{I}_{ca} = \frac{\underline{U}_{ca}}{40} = \frac{220e^{j150^o}}{-j40} = 5{,}5\,e^{j240^o}\,A.$$

2. Строим векторную диаграмму токов и напряжений:



3. Активная мощность выделяется в резисторах:

$$P = I_{ab}^2 R + I_{bc}^2 R = 2 \cdot 5{,}5^2 \cdot 40 = 2420\, Вт.$$

Реактивная мощность в емкости:

$$Q = I_{ca}^2 \cdot X_C = 5{,}5^2 \cdot 40 = 1210\, Вар.$$

ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКИ

Задача №36

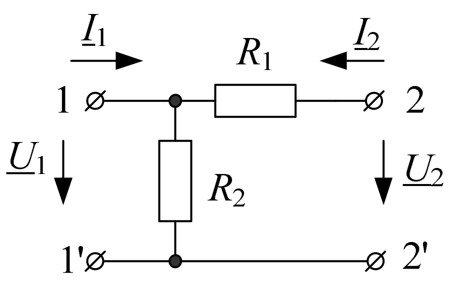


Рис.7.26

Пользуясь уравнениями четырехполюсника, найти: *Y*, *Z* и *A* - параметры Г- образной схемы (рис.7.26), если R_1=2Ом, R_2=2Ом.

Р е ш е н и е

1. Запишем уравнения четырехполюсника в системе *Y*- параметров

$$\begin{cases} \underline{I}_1 = \underline{Y}_{11}\underline{U}_1 + \underline{Y}_{12}\underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 = \underline{Y}_{21}\underline{U}_1 + \underline{Y}_{22}\underline{U}_2 \end{cases}.$$

В режиме короткого замыкания выходных зажимов ($\underline{U}_2 = 0$) определим $\underline{Y}_{11}$ и $\underline{Y}_{21}$:

$$\underline{Y}_{11} = \left(\frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_1}\right)_{\dot{U}_2=0} = \frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_1 \dfrac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}} = 1\,См,$$

$$\underline{Y}_{21} = \left(\frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_1}\right)_{\underline{U}_2=0} = -\left(\frac{\dfrac{\underline{U}_1}{R_1}}{\underline{U}_1}\right) = -\frac{1}{R_1} = -0{,}5\,См.$$

В режиме короткого замыкания входных зажимов ($\underline{U}_1 = 0$) определим $\underline{Y}_{12}$ и $\underline{Y}_{22}$:

$$\underline{Y}_{12} = \left(\frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_2}\right)_{\underline{U}_1=0} = -\frac{\dfrac{\underline{U}_2}{R_1}}{\underline{U}_2} = -\frac{1}{R_1} = -0{,}5\,См = \underline{Y}_{21},$$

$$\underline{Y}_{22} = \left(\frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_2}\right)_{\underline{U}_1=0} = \frac{\dfrac{\underline{U}_2}{R_1}}{\underline{U}_2} = \frac{1}{R_1} = 0{,}5\,См.$$

1. Запишем уравнения четырехполюсника в системе $\underline{Z}$- параметров.

Токи и напряжения соответствуют схеме (рис.7.26).

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{Z}_{11}\underline{I}_1 + \underline{Z}_{12}\underline{I}_2 \\ \underline{U}_2 = \underline{Z}_{21}\underline{I}_1 + \underline{Z}_{22}\underline{I}_2 \end{cases}.$$

В режиме холостого хода на выходных зажимах ($\underline{I}_2 = 0$) определим $\underline{Z}_{11}$ и $\underline{Z}_{21}$:

$$\underline{Z}_{11} = \left(\frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1}\right)_{\underline{I}_2=0} = \frac{\underline{U}_1}{\left(\dfrac{\underline{U}_1}{R_2}\right)} = R_2 = 2\,Ом,$$

$$\underline{Z}_{21} = \left(\frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_1} \right)_{\underline{I}_2 = 0} = \frac{\underline{I}_1 R_2}{\underline{I}_1} = R_2 = 2\,Ом.$$

В режиме холостого хода на входных зажимах ($\underline{I}_1$=0) определим $\underline{Z}_{11}$ и $\underline{Z}_{22}$:

$$\underline{Z}_{12} = \left(\frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_2} \right)_{\underline{I}_1 = 0} = \frac{\underline{I}_2 \cdot R_2}{\underline{I}_2} = R_2 = 2Ом,$$

$$\underline{Z}_{22} = \left(\frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2} \right)_{\dot{I}_1 = 0} = \frac{\underline{I}_2 \left(R_1 + R_2 \right)}{\underline{I}_2} = \left(R_1 + R_2 \right) = 4\,Ом.$$

Используя связь между $\underline{Z}$ и $\underline{Y}$ параметрами, проверим правильность расчета:

$$\underline{Z}_{11} = \frac{\underline{Y}_{22}}{|\underline{Y}|} = \frac{0,5}{\underline{Y}_{11}\underline{Y}_{22} - \underline{Y}_{21}\underline{Y}_{12}} = \frac{0,5}{0,25} = 2\,Ом.$$

1. Запишем уравнения четырехполюсника в системе $\underline{A}$- параметров. Токи и напряжения показаны на рис.7.27.

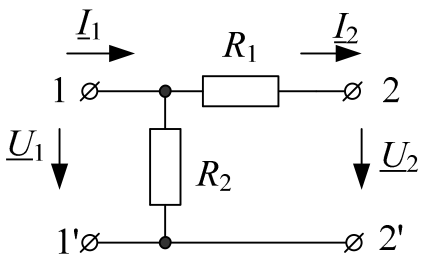


Рис.7.27

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{A}_{11}\underline{U}_2 + \underline{A}_{12}\underline{I}_2 \\ \underline{I}_1 = \underline{A}_{21}\underline{U}_2 + \underline{A}_{22}\underline{I}_2 \end{cases}.$$

В режиме холостого хода на выходных зажимах ($\underline{I}_2 = 0$) определим $\underline{A}_{11}$ и $\underline{A}_{21}$:

$$\underline{A}_{11} = \left(\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2}\right)_{\underline{I}_2=0} = 1;$$

$$\underline{A}_{21} = \left(\frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_2}\right)_{\underline{I}_2=0} = \frac{1}{R_2} = 0,5\,См.$$

В режиме короткого замыкания выходных зажимов ($\underline{U}_2 = 0$) определим $\underline{A}_{12}$ и $\underline{A}_{22}$:

$$\underline{A}_{12} = \left(\frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_2}\right)_{\underline{U}_2=0} = \frac{\underline{U}_1}{\frac{\underline{U}_1}{R_1}} = 2\,Ом,$$

$$\underline{A}_{22} = \left(\frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2}\right)_{\underline{U}_2=0} = \frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_1 \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}} = 2.$$

Вычислим определитель A- параметров:

$$\left|A\right| = \underline{A}_{11}\underline{A}_{22} - \underline{A}_{12}\underline{A}_{21} = 1 \cdot 2 - 0,5 \cdot 2 = 1.$$

Задача №37

В схеме (рис.7.27) заданы: $\underline{U}_2 = 10B$, $\underline{I}_2 = -2A$. Определить $\underline{U}_1$ и $\underline{I}_1$.

Р е ш е н и е

Подставим в систему уравнений четырехполюсника найденные в примере 7.1 A- параметры и заданные $\underline{U}_2$, $\underline{I}_2$. Получим:

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{A}_{11}\underline{U}_2 + \underline{A}_{12}\underline{I}_2 = 1 \cdot 10 - 2 \cdot 2 = 6B \\ \underline{I}_1 = \underline{A}_{21}\underline{U}_2 + \underline{A}_{22}\underline{I}_2 = 0,5 \cdot 10 - 2 \cdot 2 = 1A \end{cases}.$$

Задача №38

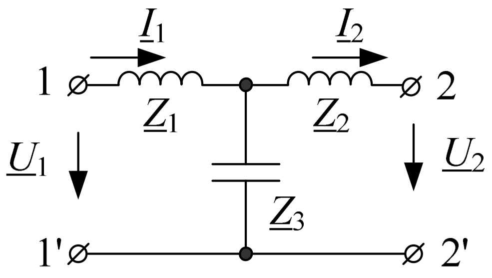


Рис.7.28

В четырехполюснике (рис.7.28) заданы комплексные сопротивления:
$\underline{Z}_1$=4j Ом, $\underline{Z}_2$=+j3 Ом, $\underline{Z}_3$= -j6 Ом.

Рассчитать *A* - параметры двумя способами: 1) непосредственно по уравнениям; 2) через сопротивления холостого хода и короткого замыкания.

Р е ш е н и е

1. Непосредственный расчет по уравнениям четырехполюсника.

В режиме холостого хода на выходных зажимах ($\underline{I}_2 = 0$) определяем:

$$\underline{A}_{11} = \left(\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2}\right)_{\underline{I}_2=0} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_1 \dfrac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_3}} = \frac{\underline{Z}_1+\underline{Z}_3}{\underline{Z}_3} = \frac{-2j}{-6j} = \frac{1}{3},$$

$$\underline{A}_{21} = \left(\frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_2}\right)_{\underline{I}_2=0} = \frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_1 \cdot \underline{Z}_3} = \frac{1}{\underline{Z}_3} = \frac{1}{-6j} = \frac{1}{6} j\, См.$$

В режиме короткого замыкания на выходных зажимах ($\underline{U}_2 = 0$) находим:

$$\underline{A}_{22} = \left(\frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2}\right)_{\underline{U}_2=0} = \frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_1 \dfrac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2+\underline{Z}_3}} = \frac{\underline{Z}_2+\underline{Z}_3}{\underline{Z}_3} = \frac{-6j+3j}{-6j} = 0{,}5,$$

$$\underline{A}_{12} = \left(\frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_2}\right)_{\underline{U}_2=0} = \frac{\underline{U}_1}{2\underline{I}_1} = \frac{\underline{U}_1}{2\dfrac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_1+\dfrac{\underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2+\underline{Z}_3}}} = \frac{4j+\dfrac{3j(-6j)}{-3j}}{2} = 5j\, Ом.$$

Выполним проверку:

$$\underline{A}_{11}\underline{A}_{22}-\underline{A}_{12}\underline{A}_{21}=\frac{1}{3}\cdot 0{,}5-5j\cdot\frac{1}{6}j=\frac{1}{6}+\frac{5}{6}=1.$$

2. Расчет А- параметров через параметры холостого хода и короткого замыкания.

Вычисляем сопротивления холостого хода и короткого замыкания:

$$\underline{Z}_{1X}=\underline{Z}_1+\underline{Z}_3=4j-6j=-2j\,Ом,$$

$$\underline{Z}_{1K}=\underline{Z}_1+\frac{\underline{Z}_2\cdot\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2+\underline{Z}_3}=4j+\frac{3j(-6j)}{3j-6j}=10j\,Ом,$$

$$\underline{Z}_{2X}=\underline{Z}_2+\underline{Z}_3=3j-6j=-3j\,Ом,$$

$$\underline{Z}_{2K}=\underline{Z}_2+\frac{\underline{Z}_1\cdot\underline{Z}_3}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_3}=3j+\frac{4j(-6j)}{4j-6j}=3j+12j=15j\,Ом.$$

Находим А- параметры по формулам (7.32)-(7.33):

$$\underline{A}_{11}=\sqrt{\frac{\underline{Z}_{1X}}{\underline{Z}_{2X}-\underline{Z}_{2K}}}=\sqrt{\frac{-2j}{-3j-15j}}=\sqrt{\frac{-2j}{-18j}}=\frac{1}{3},$$

$$\underline{A}_{12}=\underline{A}_{11}\cdot\underline{Z}_{2K}=\frac{1}{3}\cdot 15j=5j\,Ом,$$

$$\underline{A}_{21}=\frac{\underline{A}_{11}}{\underline{Z}_{1X}}=\frac{1}{3(-2j)}=j\frac{1}{6}\,См,$$

$$\underline{A}_{22}=\underline{A}_{11}\frac{\underline{Z}_{2X}}{\underline{Z}_{1X}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{(-3j)}{(-2j)}=\frac{1}{2}.$$

Задача №39

Рассчитать элементы *Т*- образной и *П*- образной схем замещения четырехполюсника с А- параметрами:

$$\underline{A}_{11}=\frac{1}{3};\ \underline{A}_{12}=5j\,Ом;\ \underline{A}_{21}=\frac{1}{6}j\,См;\ \underline{A}_{22}=\frac{1}{2}.$$

Построить эти схемы замещения.

Р е ш е н и е

1. Рассчитываем элементы Т - образной схемы замещения по формулам (7.35) - (7.37):

$$\underline{Z}_1 = \frac{\underline{A}_{11}-1}{\underline{A}_{21}} = \frac{\frac{1}{3}-1}{\frac{1}{6}j} = 4j\,Ом,\ \underline{Z}_2 = \frac{\underline{A}_{22}-1}{\underline{A}_{21}} = \frac{\frac{1}{2}-1}{\frac{1}{6}j} = 3j\,Ом,$$

$$\underline{Z}_3 = \frac{1}{\underline{A}_{21}} = \frac{1}{\frac{1}{6}j} = -6j\,Ом.$$

Мы видим, что сопротивления Т – образной схемы замещения совпадают с заданными в исходной схеме четырехполюсника (рис.7.28).

2. Рассчитываем элементы П- образной схемы замещения по формулам (7.38).

$$\underline{Z}_a = \underline{A}_{12} = 5j\,Ом,\ \underline{Z}_b = \frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{22}-1} = \frac{5j}{0{,}5-1} = -10j\,Ом,$$

$$\underline{Z}_c = \frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{11}-1} = \frac{5j}{\frac{1}{3}-1} = -\frac{15}{2}j = -7{,}5j\ Ом$$

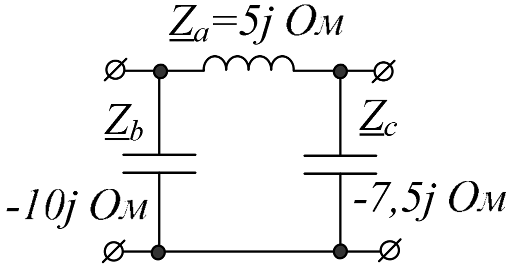


Рис.7.29

.

П- образная схеме замещения показана на рис.7.29. В ней использована одна индуктивность и две емкости. На низких частотах, когда индуктивности имеют большие номиналы и размеры, это будет преимуществом П – образной схемы в сравнении с Т – образной.

Задача №40

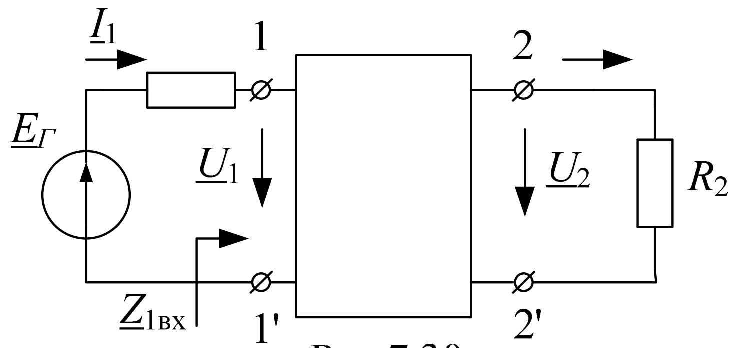


Рис.7.30

Четырехполюсник (рис.7.30) подключен к генератору гармонического напряжения с действующим значением $E_Г = 10\,В$, внутренним сопротивлением $\underline{Z}_Г = 4 - 4j\,Ом$ и нагружен на сопротивление $R_2 = 3\,Ом$. На частоте генератора четырехполюсник имеет А- параметры:

$$\underline{A}_{11} = \frac{1}{3};\ \underline{A}_{12} = 5j, Ом;\ \underline{A}_{21} = \frac{1}{6}j, Ом;\ \underline{A}_{22} = \frac{1}{2}.$$

Найти напряжения и токи на входе и выходе четырехполюсника.

Р е ш е н и е

1. Находим входное сопротивление четырехполюсника:

$$\underline{Z}_{1вх} = \frac{\underline{A}_{11}R_2 + \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}R_2 + \underline{A}_{22}} = \frac{\frac{1}{3}\cdot 3 + 5j}{\frac{1}{6}j\cdot 3 + 0{,}5} = \frac{1+5j}{0{,}5(1+j)} = 6 + 4j\,Ом.$$

2. Вычислим ток $\underline{I}_1$ и напряжение $\underline{U}_1$:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{E}_Г}{\underline{Z}_{1вх} + \underline{Z}_Г} = \frac{10}{6+4j+4-4j} = 1A,$$

$$\underline{U}_1 = \underline{I}_1\underline{Z}_{1вх} = 6 + 4j\,B.$$

3. Определим $\underline{U}_2$ и $\underline{I}_2$, пользуясь *B*- параметрами. При этом учтем, что в схеме с *B*-параметрами направления токов меняются на противоположные. Поэтому в расчетных формулах надо взять токи со знаками минус.

$$\underline{U}_2 = A_{22}\underline{U}_1 + A_{12}\left(-\underline{I}_1\right) = 0{,}5\left(6+4j\right) - 1\cdot 5j = 3-3j\,B$$

$$-\underline{I}_2 = A_{22}\underline{U}_1 + A_{11}\left(-\underline{I}_1\right) = \frac{1}{6}j\left(6+4j\right) - \frac{1}{3}\cdot 1 = j-1\,A \quad .$$

Ответ: $\underline{I}_2 = 1-j\,A$.

Задача №41

Найти характеристические параметры четырехполюсника, заданного в примере 7.3, считая известными *A*-параметры:

$$A_{11} = \frac{1}{3}\boldsymbol{;}\, A_{12} = 5j\,Ом\boldsymbol{;}\, A_{21} = \frac{1}{6}j\,См\boldsymbol{;}\, A_{22} = 0{,}5\ .$$

Решение

Вычисляем характеристические параметры, используя *A* - параметры четырехполюсника:

$$\underline{Z}_{1C} = \sqrt{\frac{\underline{A}_{11}\cdot\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}\cdot\underline{A}_{22}}} = \sqrt{\frac{1\cdot 5j}{3\cdot\frac{1}{6}j\cdot\frac{1}{2}}} = \sqrt{20}\,Ом,$$

$$\underline{Z}_{2C} = \sqrt{\frac{\underline{A}_{22}\cdot\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}\cdot\underline{A}_{11}}} = \sqrt{\frac{1\cdot 5j}{2\cdot\frac{1}{6}j\cdot\frac{1}{3}}} = \sqrt{45}\,Ом,$$

$$\ell^{g} = \sqrt{\underline{A}_{11}\cdot\underline{A}_{22}} + \sqrt{\underline{A}_{21}\cdot\underline{A}_{12}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}} + \sqrt{5j\cdot\frac{1}{6}j} = \sqrt{\frac{1}{6}} + \sqrt{-\frac{5}{6}} = 0{,}41 + j0{,}915 = 1\cdot e^{j66^0} = e^{a}\cdot e^{jb}.$$

Ответ:

$$\underline{Z}_{1C} = \sqrt{20}\,Ом\boldsymbol{,}\quad \underline{Z}_{2C} = \sqrt{45}\,Ом\boldsymbol{,}\quad a = 0\boldsymbol{,}\quad b = 66^{\circ} = 1{,}14\,рад.$$

Задача №42

Четырехполюсник (рис.7.31) нагружен на согласованное сопротивление и имеет характеристические параметры $\underline{Z}_{1C}$=10 Ом, $\underline{Z}_{2C}$=40 Ом, a=0, b=45^0. Входное напряжение U_1=100 В. Найти $\underline{U}_2$, $\underline{I}_1$, $\underline{I}_2$.

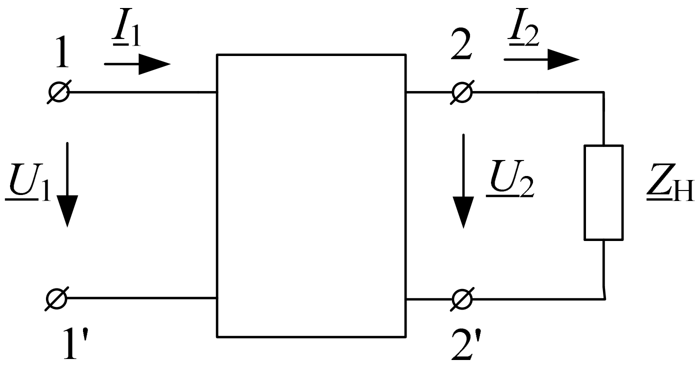


Рис.7.31

Р е ш е н и е

1. Так как нагрузка четырехполюсника согласованная, его входное сопротивление

$$\underline{Z}_{1вх} = \underline{Z}_{1C} = 10\,Ом.$$

2. Находим ток $\underline{I}_1 = \dfrac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_{1вх}} = 10\,A$.

3. В согласованном четырехполюснике справедлива формула:

$$\underline{U}_1 = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{1C}}{\underline{Z}_{2C}}}\,\underline{U}_2 e^{g}.$$

Определяем из этой формулы:

$$\underline{U}_2 = \frac{\underline{U}_1}{\sqrt{\dfrac{\underline{Z}_{1C}}{\underline{Z}_{2C}}}e^{g}} = \frac{100}{\sqrt{\dfrac{10}{40}}e^{j45^\circ}} = 200e^{-j45^\circ}\ B.$$

4.Находим ток:

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_H} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_{2C}} = 5e^{-j45^\circ}\,A.$$

Ток I2 можно также определить по формуле:

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{I}_1}{\sqrt{\frac{\underline{Z}_{2C}}{\underline{Z}_{1C}}e^{g}}} = 5e^{-j45^\circ}\,A.$$

ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Классический метод

Примеры расчета переходных процессов классическим методом

Задача №43

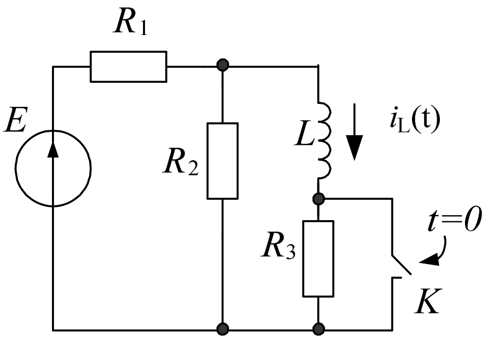


Рис. 8.23

Для цепи рис.8.23 заданы E=6В, $R_1 = R_2 = =R_3 = 2$ Ом, $L = 2$ Гн. Найти ток $i_L(t)$ и напряжение $u_L(t)$ после коммутации.

Р е ш е н и е

1. Рассчитаем докоммутационный режим:

$$i_L(0_-) = \frac{E}{R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}} \cdot \frac{R_2}{R_2 + R_3} = 1\,A = i_L(0_+).$$

$i_L(0_+) = 1A$– независимое начальное условие.

2. Принуждённый режим:

$$i_{Lnp} = \frac{E}{R_1} = 3A$$

3. Составляем характеристическое уравнение и определяем его корни:

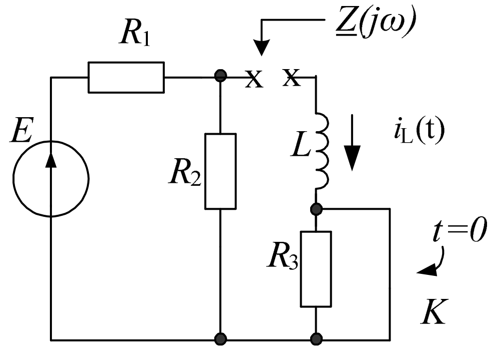


Рис. 8.23

$$\underline{Z}(j\omega) = j\omega L + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

$$pL + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 0\,;\; pL + 1 = 0,\; p_1 = -0{,}5\, c^{-1}$$

4. Свободная составляющая тока:

$i_{Lсв}(t) = Ae^{p_1 t}\,;\; A = i_{Lсв}(0_+) = i_L(0_+) - i_{Lпр}(0_+) = 1 - 3 = -2\ A;$

$i_{Lсв}(t) = -2e^{-0{,}5t}\ A.$

5. Полный ток

$i_L(t) = i_{Lпр}(t) + i_{Lсв}(t) = 3 - 2e^{-0{,}5t}\ A$

6.Найдём $u_L(t)$:

$$u_L(t) = L\frac{di_L}{dt} = 2e^{-0{,}5t}\ B.$$

Графики полного тока и напряжения показаны на рис.8.24.

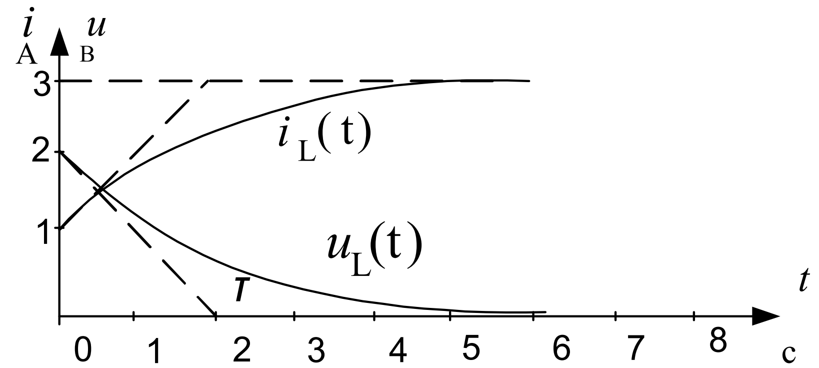


Рис. 8.24

Задача №44

Цепь, показанная на рис.8.25, имеет следующие параметры: E = 100В, $R_1 = R_2 = R_3$= 200 кОм, C =1 мкФ.

Найти $u_C(t)$ после коммутации.

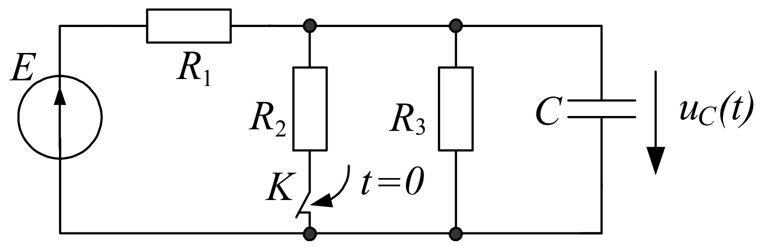


Рис.8.25

Решение

1. Расчет режима до коммутации

Параллельное соединение R_2 и R_3 равно 100 кОм.

Имеем делитель напряжения из R_1 и $R_2||R_3$.

$$u_C(0_-) = E\frac{R_2 \parallel R_3}{R_1 + R_2 \parallel R_3} = 100\cdot\frac{100\cdot 10^3}{300\cdot 10^3} = 33\,B = u_C(0_+)$$

2. Принужденный режим.

$$u_{Cпр} = E\frac{R_3}{R_1 + R_3} = 50\,B\,.$$

3. Характеристическое уравнение

$$\frac{1}{pC} + \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} = 0\,;$$

$$p_1 = -\frac{1}{\dfrac{R_1 R_3}{R_1 + R_3}C} = -\frac{1}{100\cdot 10^3\cdot 10^{-6}} = -10\ {}^1\!/_c\,.$$

4. Свободная составляющая напряжения на емкости:

$$u_{Cсв}(t) = Be^{-10t} = \left[u_C(0_+) - u_{Cпр}\right]e^{-10t} = [33 - 50]e^{-10t} = -17e^{-10t}\ B\,.$$

5. Полный переходной процесс:

$u_C(t) = u_{Cпр}(t) + u_{Cсв}(t) = 50 - 17e^{-10t}$ B.

Задача №45

В цепи рис.8.26 найти *u(t)* после коммутации.

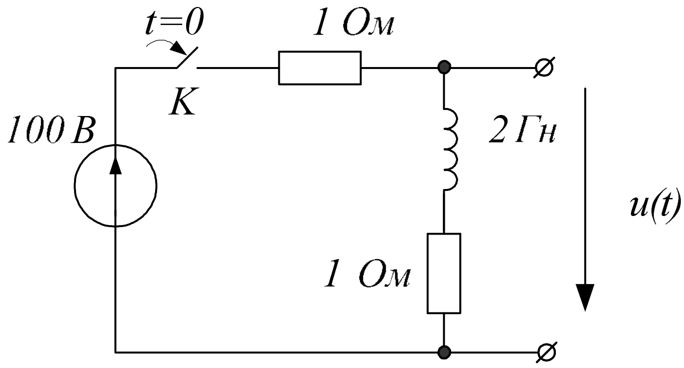


Рис.8.26

Решение

1. До коммутации $i_L(0_-) = 0$.

2. Принужденный режим $i_{Lпр} = 50$ A.

3. Характеристическое уравнение: $pL + 2 = 0$, $p_1 = -1\, {}^1\!/_c$.

4. Свободный ток: $i_{Lсв}(t) = \left[i_L(0_+) - i_{Lпр}\right] e^{-t} = -50e^{-t}$ A.

5. Полный ток: $i_L(t) = i_{Lпр} + i_{Lсв}(t) = 50 - 50e^{-t}$ A.

6. Напряжение на выходе:

$$u(t) = u_R(t) + u_L(t) = R\left(50 - 50e^{-t}\right) + L\frac{di_L}{dt} =$$

$$= 50 - 50e^{-t} - 2[-1] \cdot 50e^{-t} = 50 + 50e^{-t} \ B.$$

Ответ: $u(t) = 50 + 50e^{-t}$ B.

Задача №46

Заданы параметры цепи рис.8.27: $L = \dfrac{4}{3}$ *Гн*, $C = \dfrac{1}{16}$ *Ф*, $R_1 = R_2 = 2$ *Ом*, $E = 12$ *В*. Определить напряжение $u_C(t)$ после коммутации.

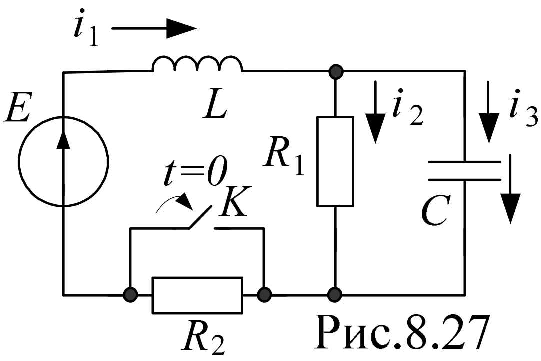


Рис.8.27

Р е ш е н и е

1. Расчет режима до коммутации:

$u_C(0_-) = u_C(0_+) = 6\,B$, $i_L(0_-) = i_L(0_+) = 3\,A$.

2. Принужденный режим:

$u_{Cпр} = 12\,B$, $i_{Lпр} = 6\,A$.

3. Характеристическое уравнение:

$$\underline{Z}(j\omega) = j\omega L + \frac{R\left(\dfrac{1}{j\omega C}\right)}{R + \dfrac{1}{j\omega C}} = 0;$$

Заменяем $j\omega$ на p:

$$Z(p) = pL + \frac{R\left(\dfrac{1}{pC}\right)}{R + \dfrac{1}{pC}} = pL + \frac{R}{RCp + 1} = 0.$$

Получим уравнение:

$$p^2RLC + pL + R = 0,$$

$$p^2 \cdot 2 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{16} + p \cdot \frac{4}{3} + 2 = 0\ ,\ p^2 + 8p + 12 = 0.$$

Корни: $p_1 = -2\ ^1\!/_c$, $p_2 = -6\ ^1\!/_c$.

Свободное напряжение: $u_{Cсв}(t) = A_1 e^{-2t} + A_2 e^{-6t}$.

4. Расчет постоянных интегрирования:

$u_{Cсв}(0_+) = A_1 + A_2 = u_C(0_+) - u_{Cпр}(0_+) = 6 - 12 = -6\,B$ (1).

$$\left.\frac{du_{Cсв}}{dt}\right|_{t=0_+} = p_1 A_1 + p_2 A_2 = \frac{i_{Cсв}(0_+)}{C}.$$

$i_{Cсв}(0_+) = i_C(0_+) - i_{Cпр}(0_+) = i_C(0_+)$.

Расчет $i_C(0_+)$ в послекоммутационной схеме $(t = 0_+)$ (рис.8.28).

В узле *a* напряжение равно $U_C(0_+) = 6B$.

Ток $i_2(0_+) = \dfrac{U_C(0_+)}{2\,Ом} = 3A$. По первому закону Кирхгофа получим $i_C(0_+) = 0$.

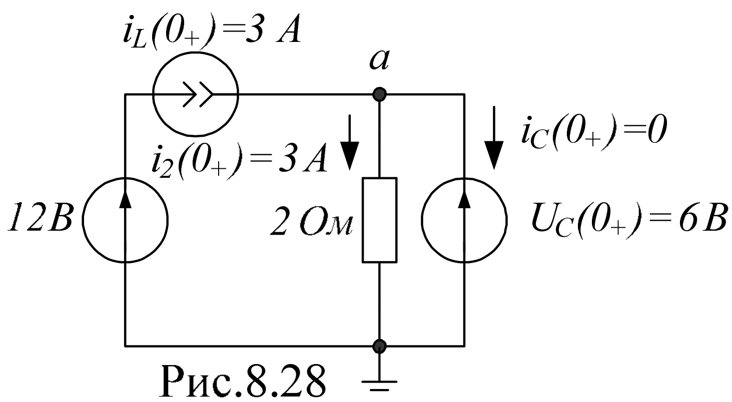


Рис.8.28

Получим систему из двух уравнений:

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = -6 \\ -2A_1 - 6A_2 = 0 \end{cases}.$$

Решение системы: $A_1 = -9\,B$, $A_2 = 3$.

Ответ: $u_C(t)$=12-9$e^{-2t} + 3e^{-6t}$.

ОПЕРАТОРНЫЙ МЕТОД

Примеры расчета переходных процессов операторным методом

Задача №47

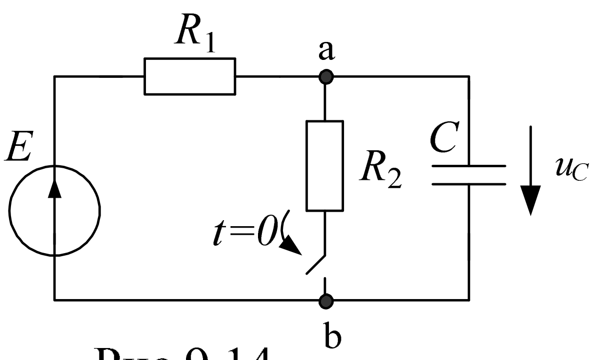


Рис.9.14

В цепи (рис.9.14) заданы параметры: E =100 В, $R_1 = R_2 =$ 100 кОм, C = 2 мкФ.

Найти u_C(t) операторным методом.

Р е ш е н и е.

1. Находим независимое начальное условие $u_C(0_+) = 100\,B$.

2. Составляем операторную схему замещения (рис.9.15):

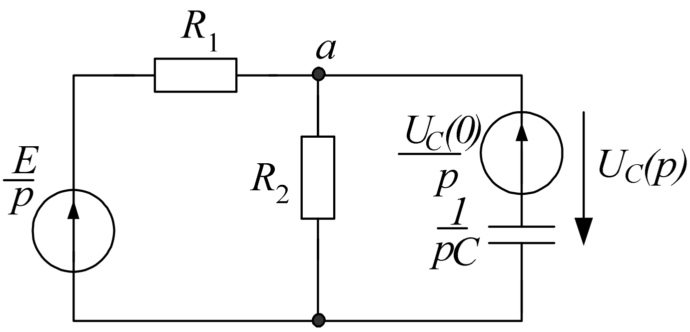


Рис.9.15

3. По схеме замещения методом двух узлов находим изображение U_C(р):

$$U_C(p)=U_{ab}(p)=\frac{\frac{E}{p}\cdot\frac{1}{R_1}+\frac{E}{p}\cdot pC}{\frac{2}{R}+pC}=\frac{E(1+pCR)}{p(2+pCR)}=\frac{E(1+p\cdot 0{,}2)}{p(2+p\cdot 0{,}2)}=\frac{A(p)}{B(p)}$$

4. Находим оригинал U_C(t) = U_{ab}(t) по теореме разложения.

Корни знаменателя находим из уравнения:

$B(p)=p(2 + pCR) = 0$, откуда:

$$p_1=0,\ p_2=-\frac{2}{RC}=-\frac{2}{0{,}2}=-10\ c^{-1}.$$

Вычисляем:

$$B'(p)=2+2p\cdot 0{,}2,\ A(p_1)=E,\ \ A(p_2)=-E,$$

$$B'(p_1)=2,\ B'(p_2)=-2$$

$$U_C(t)=U_{ab}(t)=\frac{A(p_1)}{B'(p)_{p=p_1}}e^{p_1t}+\frac{A(p_2)}{B'(p)_{p=p_2}}e^{p_2t}=$$

$$=50+50e^{-10t}B$$

Задача №48

В цепи (рис.9.16) с параметрами L = 0,1 Гн, R_1 = R_2 = 100 Ом действует источником гармонической ЭДС $e(t)=141\sin 10^3 t$ В. В момент t = 0 ключ k размыкается. Найти ток после коммутации операторным методом, используя отделение свободного режима от принужденного.

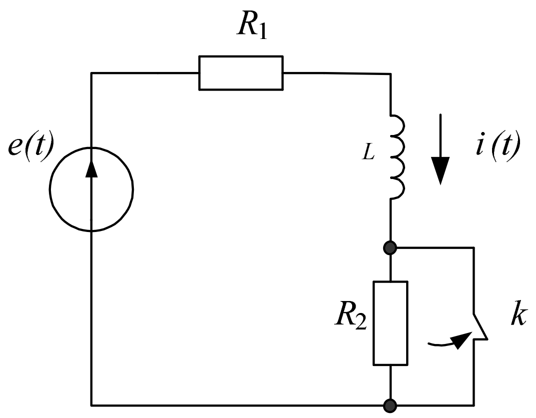


Рис.9.16

Р е ш е н и е

1. Расчет режима до коммутации:

$$\dot{I}_m=\frac{\dot{E}_m}{R_1+j\omega L}=\frac{141}{100+j100}=1e^{\text{-j}45^\circ}\ \text{А},$$

$i(t) = 1\sin(10^3 t - 45^\circ); \quad i(0_-) = i(0_+) = \sin(-45^\circ) = -0{,}707 \text{ А}.$

2. Рассчитаем принужденный режим.

После коммутации активное сопротивление цепи станет равным 200 Ом:

$$\dot{I}_{mnp} = \frac{\dot{E}_m}{200 + j100} = \frac{141}{100\sqrt{5}} e^{-j26^\circ 30'} A,$$

$$i_{np}(t) = 0{,}63\sin(10^3 t - 26^\circ 30')A.$$

Находим принужденный ток в момент $t = 0_+$:

$$i_{np}(0_+) = 0{,}63\sin(-26^\circ 30') = -0{,}281 \ A.$$

3. Находим независимые начальные условия для свободной составляющей тока в индуктивности:

$$i_{Lсв}(0_+) = i_{св}(0_+) = i(0_+) - i_{np}(0_+) =$$
$$= -0{,}707 + 0{,}281 = -0{,}426A$$

4. Составляем операторную схему замещения для свободных составляющих (рис.9.16). Находим операторный свободный ток:

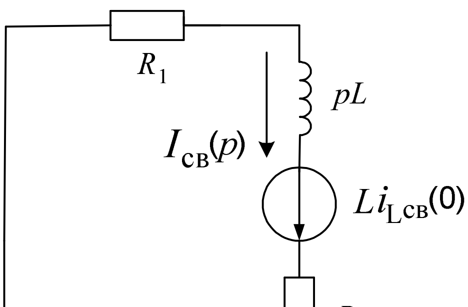


Рис.9.16

$$I_{св}(p) = \frac{Li_{св}(0)}{R_1 + R_2 + pL} = \frac{-0{,}426 \cdot 0{,}1}{200 + 0{,}1p}.$$

По теореме разложение находим оригинал свободного тока:

$$i_{св}(t) = -0{,}426e^{-2000t} A.$$

5. Находим полный ток:

$$i(t) = i_{np}(t) + i_{св}(t) =$$
$$= 0{,}63\sin(10^3 t - 26^\circ 30') - 0{,}426e^{-2000t} A$$

Задача №49

Заданы параметры цепи рис.8.27: $L=\dfrac{4}{3}\ Гн,\ C=\dfrac{1}{16}\ Ф,\ R_1=R_2=2\ Ом,\quad E=12\ В.$ Определить напряжение $u_C(t)$ после коммутации.

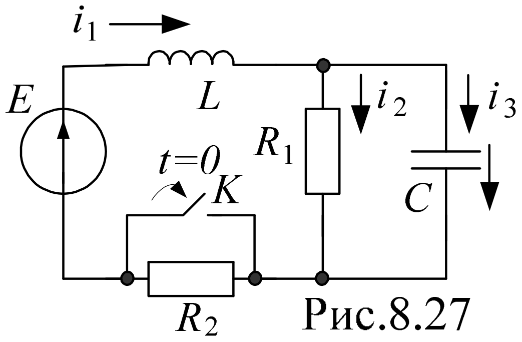


Рис.8.27

Решить задачу из примера 8.12 (рис.8.27) операторным методом расчета.

1. Расчет режима до коммутации:

$$u_C\left(0_-\right)=u_C\left(0_+\right)=6\,B\ ,\quad i_L\left(0_-\right)=i_L\left(0_+\right)=3\,A.$$

2. Составляем операторную схему замещения цепи (рис.9.17):

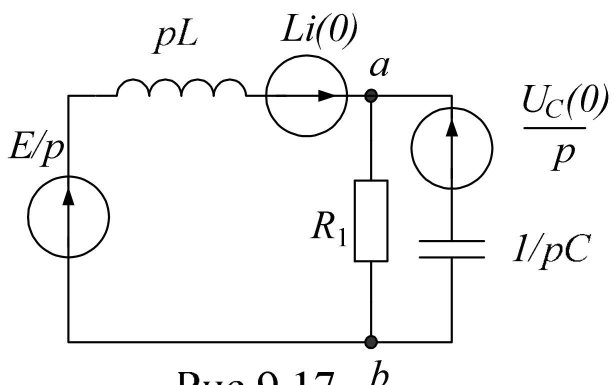


Рис.9.17

3. По методу двух узлов находим $U_{ab}\left(p\right)$:

$$U_{ab}(p)=\frac{\dfrac{\dfrac{E}{p}+Li(0)}{pL}+\dfrac{u_C(0)}{p\cdot\dfrac{1}{pC}}}{\dfrac{1}{pL}+\dfrac{1}{R_1}+pC}=$$

$$=\frac{\dfrac{\dfrac{12}{p}+\dfrac{4}{3}\cdot 3}{\dfrac{4}{3}p}+6\cdot\dfrac{1}{16}}{\dfrac{1}{p\dfrac{4}{3}}+\dfrac{1}{2}+p\dfrac{1}{16}}=\frac{6p^2+48p+144}{p\left(p^2+8p+12\right)}=\frac{A(p)}{B(p)}.$$

4. Находим оригинал напряжения по теореме разложения.

Для этого:

Находим корни знаменателя:

$B(p)=0,\ p_1=0, p_2=-2\ {}^1\!/_c, p_3=-6\ {}^1\!/_c.$

Находим производную знаменателя:

$B'(p)=3p^2+16p+12.$

Вычисляем:

$$\frac{A(p_1)}{B'(p_1)}=\frac{144}{12}=12\,B.$$

$$\frac{A(p_2)}{B'(p_2)}=\frac{6\cdot(-2)^2+48\cdot(-2)+144}{3\cdot(-2)^2+16\cdot(-2)+12}=-9\,B.$$

$$\frac{A(p_3)}{B'(p_3)}=\frac{6\cdot(-6)^2+48\cdot(-6)+144}{3\cdot(-6)^2+16\cdot(-6)+12}=3\,B.$$

Получим ответ:

$$u_C\left(t\right)=\frac{A\left(p_1\right)}{B'\left(p_1\right)}e^{p_1t}+\frac{A\left(p_2\right)}{B'\left(p_2\right)}e^{p_2t}+\frac{A\left(p_3\right)}{B'\left(p_3\right)}e^{p_3t}=$$

$$=12-9e^{-2t}+3e^{-6t}.$$

Ответ совпадает с расчетом классическим методом.

Задача №50

Заданы параметры цепи рис.10.19: $R_1 = R_2 = 500$ кОм, $C = 1$ мкФ. такую цепь называют пропорционально-интегрирующий фильтр.

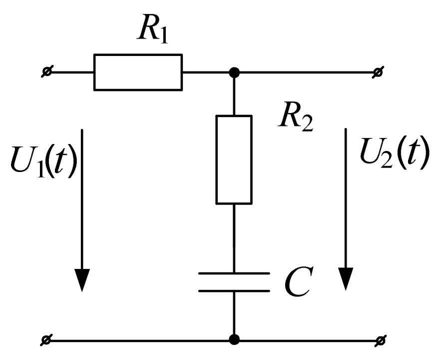


Рис.10.19

Найти передаточную функцию по напряжению K(p), переходную характеристику h(t), переходную входную проводимость g(t), импульсную характеристику $h_\delta(t)$, импульсную входную проводимость $g_\delta(t)$.

Р е ш е н и е

1. Передаточная функция цепи:

$$K(p)=\frac{U_2(p)}{U_1(p)}=\frac{U_1(p)}{Z(p)}\cdot\frac{R_2+\dfrac{1}{pC}}{U_1(p)}=$$

$$=\frac{R_2+\dfrac{1}{pC}}{R_1+R_2+\dfrac{1}{pC}}=0{,}5\frac{p+2}{p+1}.$$

2. Переходная характеристика h(t).

а) Определение классическим методом:

Считаем u_1(t) = *1*(t). Тогда, рассчитаем цепь первого порядка, получим:

$$h(t) = 1\text{-}0{,}5e^{-t}.$$

б) Определение операторным методом:

$$h(t) \doteq \frac{K(p)}{p} = 0{,}5\frac{p+2}{p(p+1)} \doteq 1 - 0{,}5e^{-t}.$$

3. Переходная проводимость:

$$g(t) = \frac{1}{pZ(p)} = 0{,}5\frac{1}{p(R_1 + R_2 + \frac{1}{pC})} = \frac{10^{-6}}{p+1} \doteq g(t) = 10^{-6}e^{-t}См.$$

4. Импульсная характеристика:

$$h_\delta(t) \doteq K(p) = 0{,}5\frac{p+2}{p+1} = 0{,}5(\frac{p+1}{p+1} + \frac{1}{p+1}) =$$

$$= 0{,}5 + \frac{0{,}5}{p+1} \doteq 0{,}5\delta(t) + 0{,}5e^{-t}c^{-1}.$$

Проверка

$$h_\delta(t) = h(0)\delta(t) + h'(t) = 0{,}5\delta(t) + 0{,}5e^{-t}c^{-1}.$$

5. Импульсная проводимость:

$$g_\delta(t) \doteq \frac{1}{Z(p)} = \frac{10^{-6}p}{p+1} = 10^{-6}(1 - \frac{1}{p+1}).$$

$$g_\delta(t) = 10^{-6}\delta(t) - 10^{-6}e^{-t}См/c$$

Задача №51

На заданную цепь (рис.10.19) воздействует импульс напряжения $u_1(t) = Ue^{-\alpha t}$ длительности t_1 (рис.10.20). Параметры импульса $U = 100\ B,\ \alpha = 2c^{-1},\ t_1 = 1c.$

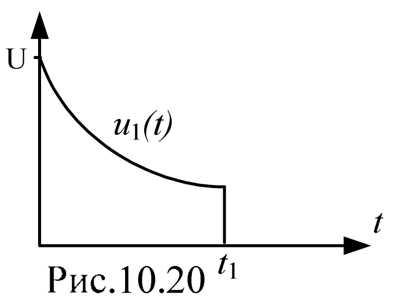


Рис.10.20

Определить напряжение $u_2(t)$ при помощи интегралов Дюамеля первого и второго вида.

Указание:

Следует обратить внимание на разбиение временной области на интервалы интегрирования, правильную расстановку пределов в интегралах, особенности вычисления интегралов, содержащих импульсную функцию.

1. Применение интеграла Дюамеля первого вида

На интервале $0 \le t < t_1$:

$$u_2(t) = u_1(0)h(t) + \int_0^t u_1'(\tau)h(t-\tau)d\tau .$$

Находим:

$$u_1(0) = 100B;\ u_1(t) = 100e^{-2t}\ B;$$

$$h(t) = 1 - 0{,}5e^{-t};$$

$$h(t\text{-}\tau) = 1 - 0{,}5e^{-(t-\tau)},\ u_1'(\tau) = -\alpha U\mathrm{e}^{-\alpha\tau} = -200\mathrm{e}^{-2\tau}B .$$

Вычисляем интеграл:

$$u_2(t) = 100(1 - 0{,}5e^{-t}) + \int_0^t (-200\mathrm{e}^{2\tau})(1 - 0{,}5\mathrm{e}^{-(t-\tau)})d\tau =$$

$$= 100 - 50e^{-t} - \int_0^{\mathrm{t}} 200\mathrm{e}^{-2\tau}d\tau + 100e^{-t}\int_0^{\mathrm{t}} \mathrm{e}^{-\tau}d\tau = 50e^{-t}B$$

На интервале $t_1 < t < \infty$:

$$u_2(t) = u_1(0)h(t) + \int_0^{t_1} u_1'(\tau)h(t\text{-}\tau)\mathrm{d}\tau - U\mathrm{e}^{-\alpha t_1}h(t - t_1) =$$

$$= 100 - 50\mathrm{e}^{-t} - 200\int_0^{t_1} \mathrm{e}^{-2\tau}(1 - 0{,}5\mathrm{e}^{-t+\tau})d\tau - 100\mathrm{e}^{-2t_1}(1 - 0{,}5\mathrm{e}^{-(t-t_1)}) =$$

$$= 50e^{-t}(1 - e^{-t_1})B$$

2. Применение интеграла Дюамеля второго вида.

На интервале $0 \le t < t_1$:

$$u_2(t) = \int_0^t u_1(\tau)h_\delta(t-\tau)\mathrm{d}\tau = \int_0^t 100e^{-2\tau}(0{,}5\delta(t-\tau) + 0{,}5\mathrm{e}^{-(t-\tau)})d\tau =$$

$$= \int_0^t 50e^{-2\tau}\delta(t-\tau)\mathrm{d}\tau + \int_0^t 50e^{-\mathrm{t}}e^{-\tau}d\tau = 50e^{-2t} + 50e^{-t} - 50e^{-2t} = 50e^{-t}$$

Пояснение:

На интервале интегрирования по τ $(0 \div t)$ при $\tau = t$ действует фильтрующее свойство δ- функции. Поэтому

$$\int_0^t 50e^{-2\tau}\delta(t-\tau)d\tau = 50e^{-2t}.$$

На интервале $t_1 < t < \infty$:

$$u_2(t) = \int_0^{t_1} u_1(\tau)h_\delta(t-\tau)d\tau = \int_0^{t_1} 50e^{-2\tau}\delta(t-\tau)d\tau + \int_0^{t_1} 50e^{-2\tau}e^{-t}e^{\tau}d\tau =$$

$$= 50e^{-t} - 50e^{-t_1}e^{-t} = 50e^{-t}(1 - e^{-t_1})$$

Пояснение:

Так как $t_1 < t$ при интегрировании по τ $(0 \div t_1)$ условие $\tau = t$ не выполняется, $\delta(t-\tau)$ под интегралом будет равна нулю. Поэтому:

$$\int_0^{t_1} 50\mathrm{e}^{-2\tau}\delta(t-\tau)\mathrm{d}\tau = 0.$$

Результаты, полученные с использованием первого и второго интеграла, Дюамеля совпадают.

На рис.10.21 показаны графики входного воздействия (сплошная линия) и реакции на выходе (пунктирная линия).

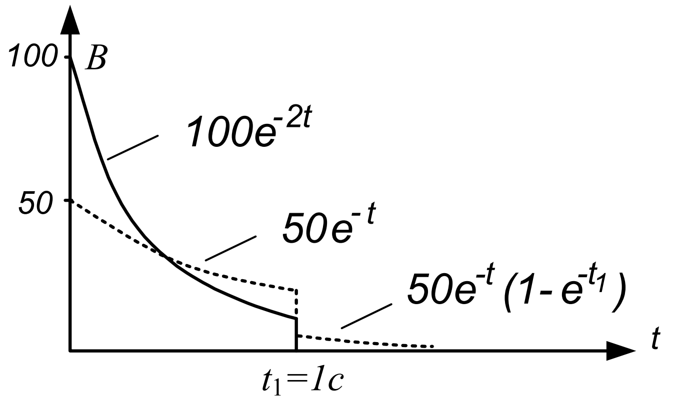


Рис.10.21

Задача №52

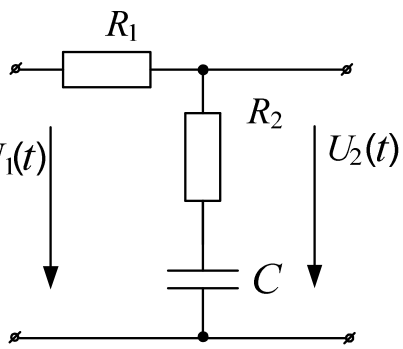


Рис.10.19

На цепь (рис.10.19) на интервале времени $t \geq 0$ воздействует импульс напряжения $u_1(t) = 1 - e^{-4t}\,B$.

Оператором методом найти выходное напряжение.

Р е ш е н и е

1. Находим изображение входного сигнала:

$$u_1(t) = 1\text{-}e^{-4t} \doteqdot \frac{4}{p(p+4)} = U_1(p).$$

2. Находим передаточную функцию цепи (см. пример 10.6):

$$K(p) = 0{,}5\frac{p+2}{p+1}.$$

3. Находим изображение выходного сигнала:

$$U_2(p) = K(p)\cdot U(p) = 0{,}5\frac{(p+2)}{(p+1)}\frac{4}{p(p+4)} = \frac{2(p+2)}{p(p+1)(p+4)}.$$

4. По теореме разложения находим оригинал выходного напряжения:

$$u_2(t)=1-\frac{1}{3}e^{-4t}-\frac{2}{3}e^{-t}B.$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи. – М.: Гардарики, 2006. – 701 с.

2. Алехин В.А. Моделирование электрических цепей и электронных схем в среде «TINA-8». – М: МИРЭА, 2010 г., № 0986.

3. Алехин В.А. Линейные электрические цепи. Компьютерное моделирование в среде «TINA-8». – М: МИРЭА, 2010 г., № 1083.

4. TINA. Design Suite. The Complete Electronics Lab for Windows. Quick Start manual. - http://www.designsoftware.com/

5. TINA PRO ADVANCED TOPICS. - http://www.tina.com/

6. TINA PCB Design manuals.-http://www.designsoftware.com/