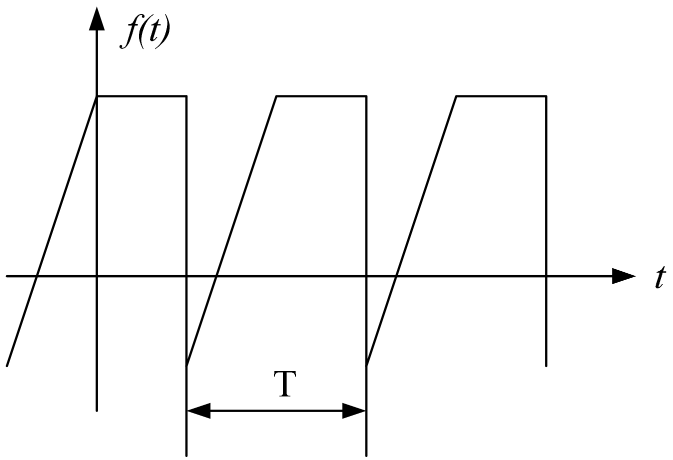
ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ПРИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ НЕГАРМОНИЧЕСКИХ ТОКАХ И НАПРЯЖЕНИЯХ

Разложение периодических функций в ряд Фурье



Периодический сигнал $f\left(t\right)=f\left(t+T\right)$

Любая периодическая функция, удовлетворяющая условиям Дирихле, может быть разложена в ряд Фурье:

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos n\Omega t+b_n \sin n\Omega t\right) \qquad (1).$$

В этом уравнении: $\Omega=\dfrac{2\pi}{T}$ - частота первой гармоники;

амплитуды гармоник:

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cos n\Omega t dt, \quad b_n=\frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\sin n\Omega t dt;$$

постоянная составляющая: $\dfrac{a_0}{2}=\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)dt.$

Вторая форма ряда Фурье

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\Omega t - \Psi_n).$$

Преобразуем этот ряд:

$$A_n \cos(n\Omega t - \Psi_n) = A_n \cos n\Omega t \cos\Psi_n + A_n \sin\Omega t \sin\Psi_n =$$
$$= a_n \cos n\Omega t + b_n \sin n\Omega t,$$

где: $a_n = A_n \cos\Psi_n$, $b_n = A_n \sin\Psi_n$,

$$\sqrt{A_n^2\left(\cos^2\Psi_n + \sin^2\Psi_n\right)} = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = A_n,\ tg\Psi_n = \frac{b_n}{a_n}.$$

Дискретные спектры

В разложение Фурье (2-я форма) каждая гармоническая составляющая $A_n \cos(n\Omega t - \Psi_n)$ характеризуется частотой $\omega_n = n\Omega$, амплитудой A_n, фазой Ψ_n.

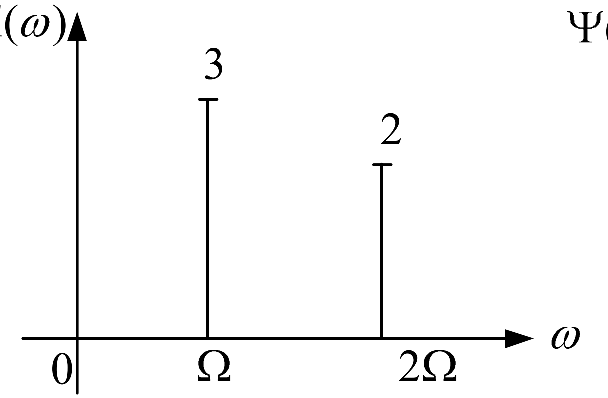
Амплитуды и фазы можно изобразить на оси частот.

Совокупность амплитуд гармонических составляющих, отнесённых к частотам, называется амплитудным спектром.

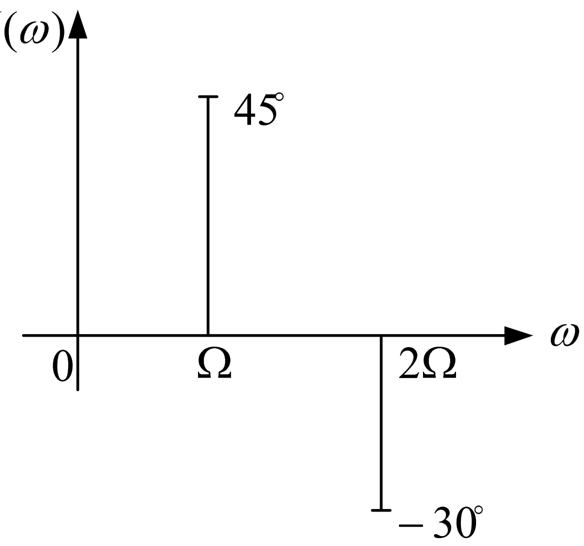
Совокупность начальных фаз гармоничных составляющих, отнесённых к частотам, называется фазовым спектром.

Пример:

$$f(t) = 3\cos\left(\Omega t + 45^0\right) + 2\cos(2\Omega t - 30^0)$$



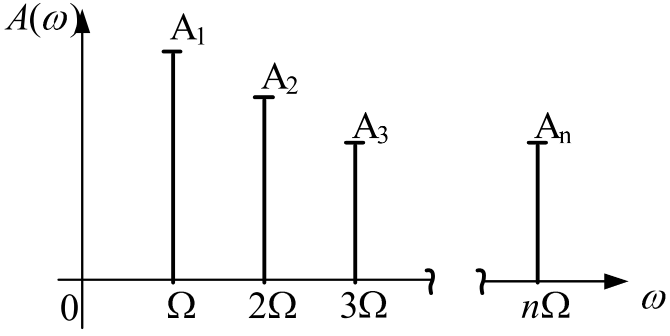
Амплитудный спектр



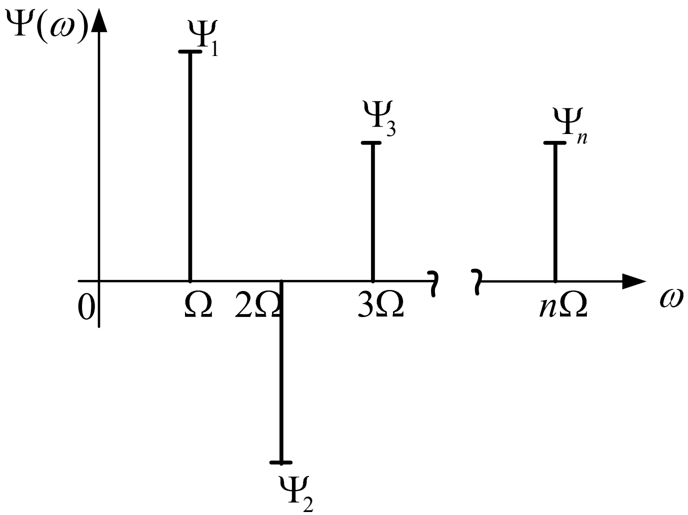
Фазовый спектр

Периодическая негармоничная функция имеет дискретные линейные спектры:

$$f\left(t\right)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\,cos(\,n\Omega t-\Psi_n\,).$$



Амплитудный спектр



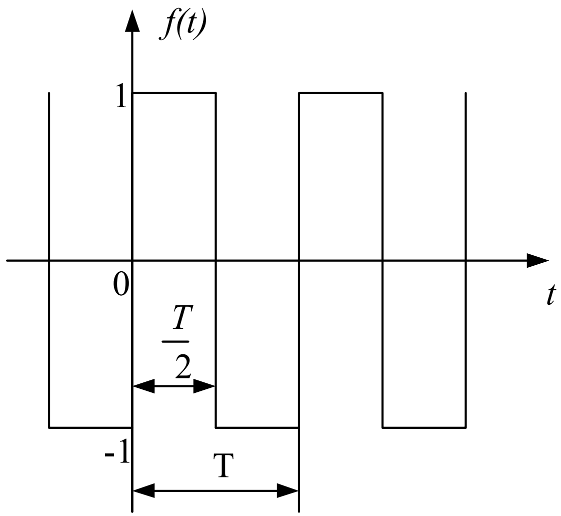
Фазовый спектр

Разность соседних частот $\Delta\omega = \Omega = \dfrac{2\pi}{T}$.

Спектральные составляющие с кратными частотами называется гармониками сигнала. Спектр, состоящий из гармоник, называют гармоническим.

Спектры, заданные на положительной оси частот, называются односторонними.

Пример разложения функции в ряд Фурье



$$f(t) = \begin{cases} 1, \ 0 < t < \dfrac{T}{2} \\ -1, \dfrac{T}{2} < t < T \end{cases}$$

Постоянная составляющая $\frac{a_0}{2}=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt=0$, так как функция симметричная относительно оси абсцисс.

Амплитуды гармоник:

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cos n\Omega t\,dt=\frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} 1\cdot\cos n\Omega t\,dt-\frac{2}{T}\int_{\frac{T}{2}}^{T} 1\cdot\cos n\Omega t\,dt=$$

$$=\frac{2}{n\Omega T}\sin\Omega t\Big|_0^{\frac{T}{2}}-\frac{2}{n\Omega T}\sin\Omega t\Big|_{\frac{T}{2}}^{T}=$$

$$=\frac{2}{n\Omega T}\left[\sin n\Omega\frac{T}{2}-\sin 0-\sin n\Omega T+\sin n\Omega\frac{T}{2}\right]=$$

$$= \frac{2}{n\Omega\frac{2\pi}{\Omega}}\left[sin\, n\Omega\frac{2\pi}{2\Omega} - sin\, 0 - sin\, n\Omega\frac{2\pi}{\Omega} + sin\, n\Omega\frac{2\pi}{2\Omega}\right] = 0.$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} 1\cdot sin\, n\Omega t dt - \frac{2}{T}\int_{\frac{T}{2}}^{T} 1\cdot sin\, n\Omega t dt =$$

$$= -\frac{2}{n\Omega T}\left[cos\, n\Omega t\left|\begin{matrix}\frac{T}{2}\\ 0\end{matrix}\right. - \frac{2}{n\Omega T}cos\, n\Omega t\left|\begin{matrix}T\\ \frac{T}{2}\end{matrix}\right.\right] =$$

$$= -\frac{2}{n\Omega\frac{2\pi}{\Omega}}\left[\cos n\pi - 1 - \cos 2n\pi + \cos n\pi\right] = -\frac{1}{n\pi}\left[2\cos n\pi - 2\right].$$

Для четных «n» $b_n = 0$.

Далее получим:

$$b_1 = \frac{4}{\pi} = 1,27\,, b_3 = \frac{4}{3\pi} = 0,424,\; b_5 = \frac{4}{5\pi} = 0,254....$$

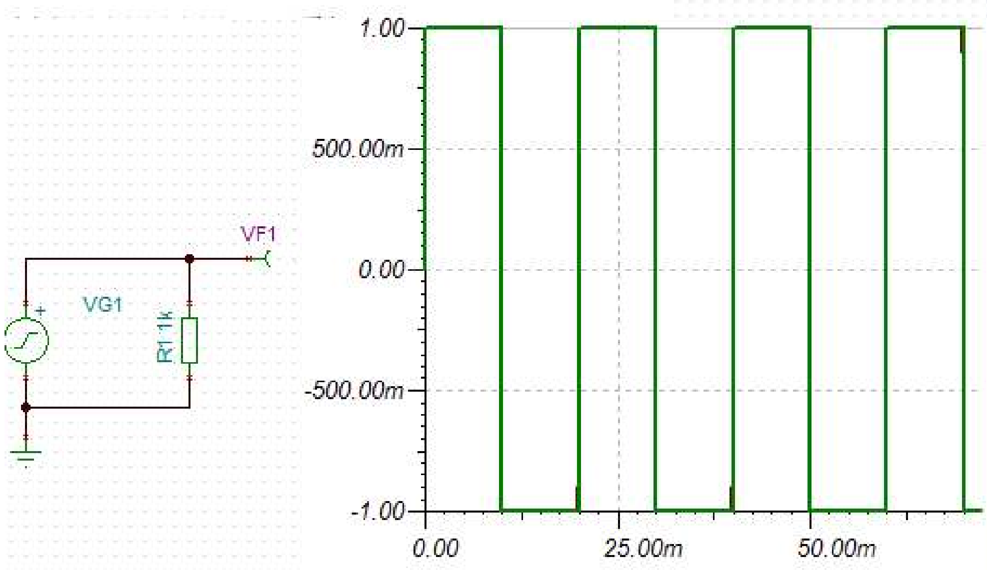
В результате: $f(t) = \frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin\Omega t}{1} + \frac{\sin 3\Omega t}{3} + \frac{\sin 5\Omega t}{5} + ...\right).$

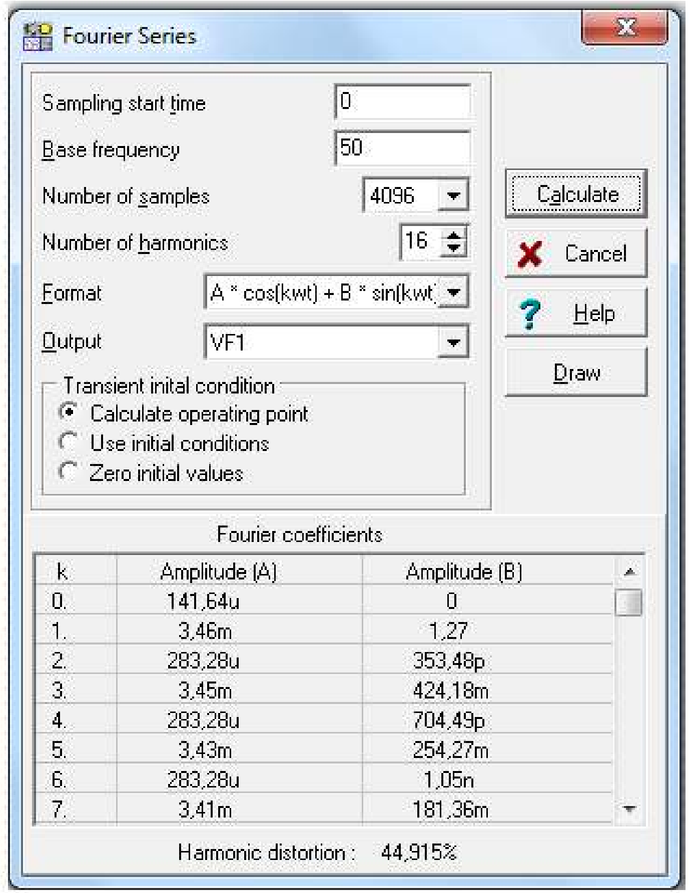
Функции, симметричные относительно начала координат, содержат только синусные гармоники.

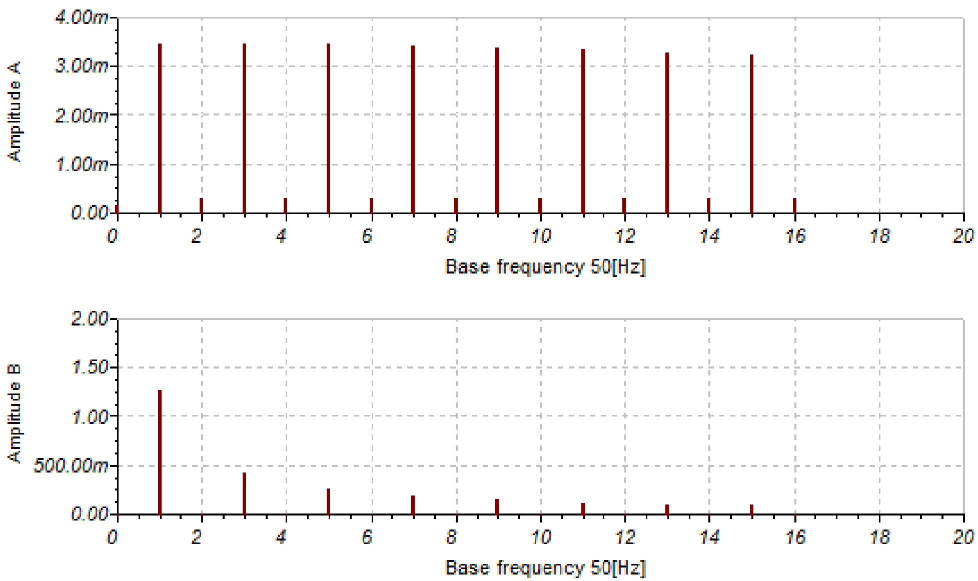
Функции, симметричные относительно оси ординат, содержат только косинусные гармоники.

Пример Фурье-анализа в программе «TINA-9»

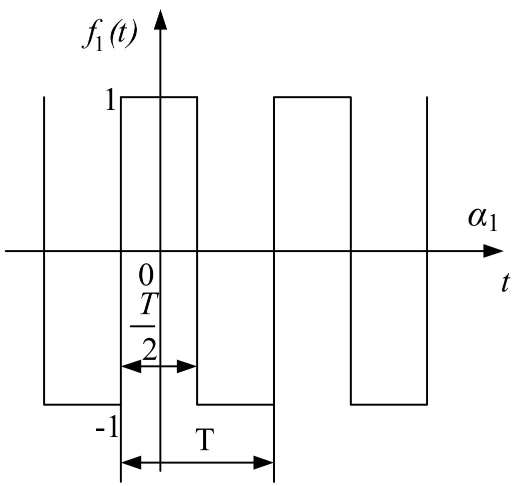
Спектр несинус.TSC







Смещение функции по времени



Функция $f_1(t)$ опережает предыдущую функцию $f(t)$ на $\frac{T}{4}$. Фазовый сдвиг

$$\beta = \frac{\Omega T}{4} = \frac{\Omega \cdot 2\pi}{4\Omega} = \frac{\pi}{2}.$$

Следовательно: $f_1(\alpha_1) = f\left(\alpha_1 + \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Подставляем в ряд Фурье для $f(t)$ новую координату $\alpha_1 + \dfrac{\pi}{2}$:

$$f_1(\alpha_1) = \frac{4}{\pi}\left(\frac{sin\left(\Omega t + \frac{\pi}{2}\right)}{1} + \frac{sin\,3\left(\Omega t + \frac{\pi}{2}\right)}{3} + \frac{sin\,5\left(\Omega t + \frac{\pi}{2}\right)}{5} + \ldots\ldots\ldots\right) =$$

$$
= \frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin\Omega t \cos\frac{\pi}{2} + \cos\Omega t \sin\frac{\pi}{2}}{1} + \frac{\sin 3\Omega t \cos\frac{3\pi}{2} + \cos 3\Omega t \sin\frac{3\pi}{2}}{3} \ldots\ldots\ldots \right) =
$$

$$
= \frac{4}{\pi}\left[\frac{\cos\Omega t}{1} - \frac{\cos 3\Omega t}{3} + \frac{\cos 5\Omega t}{5} - \ldots\ldots\ldots \right].
$$

Здесь учтено, что: $\sin\left(\Omega t + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\Omega t \cos\frac{\pi}{2} + \cos\Omega t \sin\frac{\pi}{2}.$

Анализ линейных цепей при периодических негармонических воздействиях

Негармонические напряжение и ток представляют рядом Фурье в виде гармонических составляющих и постоянной составляющей.

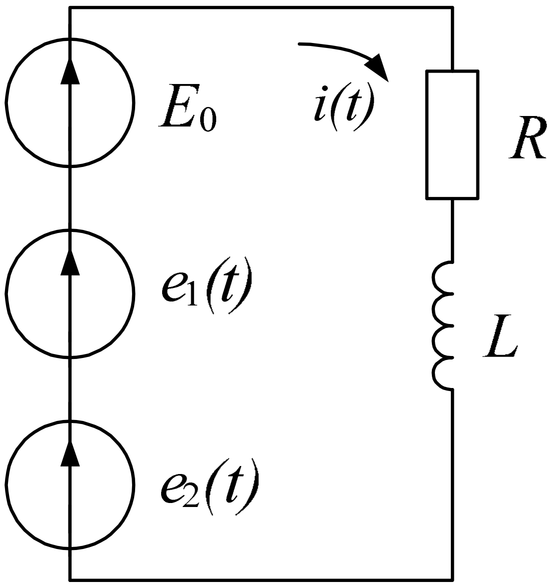
Введем обозначения:

$\underline{I}_{1m(2)}$ -комплексная амплитуда тока в первой ветви на второй гармонике;

номер ветви

номер гармоники

$\underline{Z}_{2(3)}$ - комплексное сопротивление второй ветви на третьей гармонике.



$$e(t) = E_0 + e_1(t) + e_2(t) =$$
$$= E_0 + E_{m(1)} \sin\Omega t + E_{m(2)} \sin 2\Omega t.$$

Расчет ведут в комплексной форме для каждой гармоники отдельно и используют принцип наложения.

Порядок расчёта

1. Расчёт на постоянном токе $\omega_0 = 0,\quad Z\left(0\right) = R + j0L = R,$

$$I_0 = \frac{E_0}{R}$$

2. Расчет на первой гармонике:

$$\underline{E}_{m(1)} = E_{m(1)}e^{j0};\ \underline{Z}_{(1)} = R + j\Omega L,\ \underline{I}_{m(1)} = \frac{\underline{E}_{m(1)}}{\underline{Z}_{(1)}} = I_{m(1)}e^{j\varphi_{I(1)}}.$$

Мгновенное значение первой гармоники тока:

$$i_{(1)}\left(t\right) = I_{m(1)}\,sin(\Omega t + \varphi_{I(1)}).$$

3. Расчет на второй гармонике:

$$\underline{E}_{m(2)} = E_{m(2)} e^{j0},\ \underline{Z}_{(2)} = R + j2\Omega L,\ \underline{I}_{m(2)} = \frac{\underline{E}_{m(2)}}{\underline{Z}_{(2)}} = I_{m(2)} e^{j\varphi_{I(2)}}.$$

Мгновенное значение второй гармоники тока:

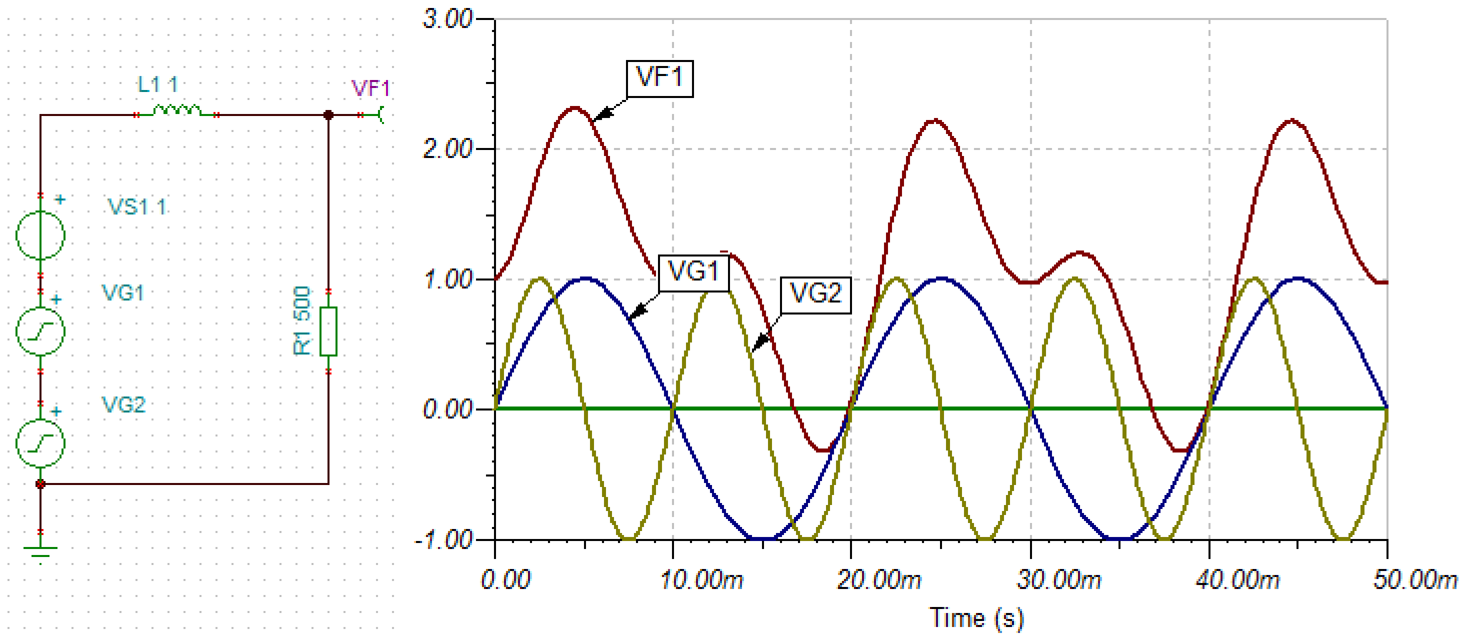
$$i_{(2)}(t) = I_{m(2)} \sin(2\Omega t + \varphi_{I(2)}).$$

При расчете не гармонических сигналов нельзя суммировать комплексные амплитуды разных частот. Суммируют только мгновенные значения.

Ответ:

$$i(t) = I_0 + i_{(1)}(t) + i_{(2)}(t) = I_0 + I_{m(1)} \sin\left(\Omega t + \varphi_{I(1)}\right) + I_{m(2)} \sin\left(2\Omega t + \varphi_{I(2)}\right).$$

Пример моделирования [Расчет НС.TSC]



Действующее значение негармонических сигналов

Действующее значение негармонического периодического сигнала равно значению постоянного тока (напряжения), при котором в активном сопротивлении рассеивается та же мощность что при негармоническом сигнале.

Для периодического сигнала среднюю мощность находим как интеграл от мгновенной мощности по периоду:

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T i^2 R\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{u^2}{R}\,dt$$

Для постоянного тока: $P = I^2 R = \dfrac{U^2}{R}$.

Приравняем мощности: $P_= = I^2 R = \dfrac{R}{T}\int_0^T i^2\,dt$.

Действующее значение негармонического тока: $I = \sqrt{\dfrac{1}{T}\int_0^T i^2\,dt}$.

Действующее значение напряжения: $U = \sqrt{\dfrac{1}{T}\int_0^T U^2(t)\,dt}$.

Действующее значение периодической функции $f(t)$:

$$F = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)\,dt}\,.$$

Пусть $i(t) = I_0 + I_{m(1)}\,sin\,\Omega t + I_{m(2)}\,sin\,2\Omega t + \ldots\ldots$

Найдем действующее значение тока:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \left(I_0 + I_{m(1)}\,sin\,\Omega t + I_{m(2)}\,sin\,2\Omega t + \ldots\ldots\right)^2 dt} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \left[I_0^2 + I_{m(1)}^2\,sin^2\,\Omega t + I_{m(2)}^2\,sin^2\,2\Omega t\ldots. + 2I_0 I_{m(1)}\,sin\,\Omega t + \ldots\right]^2 dt}\,.$$

При интегрировании по периоду останутся только постоянные составляющие этой суммы от квадратов синусов:

$$\left(I_{m(1)}\,sin\,\Omega t\right)^2=\frac{I_{m(1)}^2}{2}\left(1-cos\,2\Omega t\right).$$

В итоге получим:

$$I=\sqrt{I_0^2+\frac{I_{m(1)}^2}{2}+\frac{I_{m(2)}^2}{2}+.....}=\sqrt{I_0^2+I_{(1)}^2+I_{(2)}^2+...}$$

Действующее значение периодической негармонической функции равно квадратному корню из суммы квадратов действующих значений всех составляющих.

Для напряжения: $U=\sqrt{U_0^2+U_{(1)}^2+U_{(2)}^2+....}$.

Мощность периодических негармонических сигналов

Средняя мощность $P=\frac{1}{T}\int\limits_0^T u(t)i(t)dt$.

Рассмотрим негармонический сигнал:

$$u(t) = U_0 + U_{m(1)} sin(\Omega t + \Psi_{U(1)}) + U_{m(2)} sin(2\Omega t + \Psi_{U(2)});$$

$$i(t) = I_0 + I_{m(1)} sin(\Omega t + \Psi_{I(1)}) + I_{m(2)} sin(2\Omega t + \Psi_{I(2)}).$$

Мгновенная мощность:

$$p(t) = u(t)i(t) = U_0 I_0 + U_0 I_{m(1)} sin(\Omega t + \Psi_{I(1)}) + U_0 I_{m(2)} sin(2\Omega t + \Psi_{I(2)}) +$$

$$+ I_0 U_{m(1)} sin(\Omega t + \Psi_{U(1)}) + I_0 U_{m(2)} sin(2\Omega t + \Psi_{U(2)}) +$$

$$+ U_{m(1)} sin(\Omega t + \Psi_{U(1)}) I_{m(1)} sin(\Omega t + \Psi_{I(1)}) +$$

$$+ U_{m(2)} sin(2\Omega t + \Psi_{U(2)}) I_{m(2)} sin(2\Omega t + \Psi_{I(2)}) +$$

$$+ U_{m(1)} sin(\Omega t + \Psi_{U(1)}) I_{m(2)} sin(2\Omega t + \Psi_{I(2)}) +$$

$$+ U_{m(2)} sin(2\Omega t + \Psi_{U(2)}) I_{m(1)} sin(\Omega t + \Psi_{I(1)}).$$

При интегрировании постоянные составляющие получим только от квадрата функции одинаковых частот и от постоянных составляющих.

Активная мощность негармонического тока равна сумме активных мощностей отдельных гармоник:

$$P = U_0 I_0 + \frac{U_{m(1)} I_{m(1)}}{2} cos(\Psi_{U(1)} - \Psi_{I(1)}) + \frac{U_{m(2)} I_{m(2)}}{2} cos(\Psi_{U(2)} - \Psi_{I(2)}) =$$
$$= U_0 I_0 + U_1 I_1 cos\,\varphi_1 + U_2 I_2 cos\,\varphi_2 = P_0 + P_1 + P_2.$$

Реактивная мощность

$$Q = U_{(1)} I_{(1)} sin\,\varphi_{(1)} + U_{(2)} I_{(2)} sin\,\varphi_{(2)} = Q_1 + Q_2.$$

Полная мощность равна произведению действующих значений напряжения и тока:

$$S = UI,\ \ U = \sqrt{U_0^2 + U_{(1)}^2 + U_{(2)}^2},\ I = \sqrt{I_0^2 + I_{(1)}^2 + I_{(2)}^2}.$$

В цепи негармонического тока $S \neq \sqrt{P^2 + Q^2}$.

Коэффициенты характеризующие несинусоидальные периодические процессы

Обозначим:

f_{max} - максимальное значение функции за период;

$F_{cp} = \frac{1}{T}\int_0^T \left|f(t)\right| dt$ - среднее значение по модулю (для синусоиды $F_{cp} = \frac{2}{\pi}U_m$);

$F=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)dt}$ - действующее значение функции (для синусоиды $F=\frac{U_m}{\sqrt{2}}$).

Коэффициент формы есть отношение действующего значения к среднему: $k_ф=\frac{F}{F_{ср}}$ (для синусоиды $sin\,k_ф=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}=1{,}11$).

Коэффициент амплитуды есть отношение максимального значения к среднему: $k_a=\frac{f_{max}}{F_{ср}}$ (для синусоиды $k_a=\sqrt{2}$).

Коэффициент искажения есть отношение действующего значения первой гармоники к действующему значению всей функции: $k_и = \dfrac{F_1}{F}$.

Коэффициент мощности есть отношение активной мощности к полной: $\chi = \dfrac{P}{UI}$.