ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

Определение установившегося и переходного процесса

Установившимся (стационарным) процессом называется начавшийся бесконечно давно процесс, при котором напряжения и токи в цепи остаются постоянными или изменяются по периодическому закону.

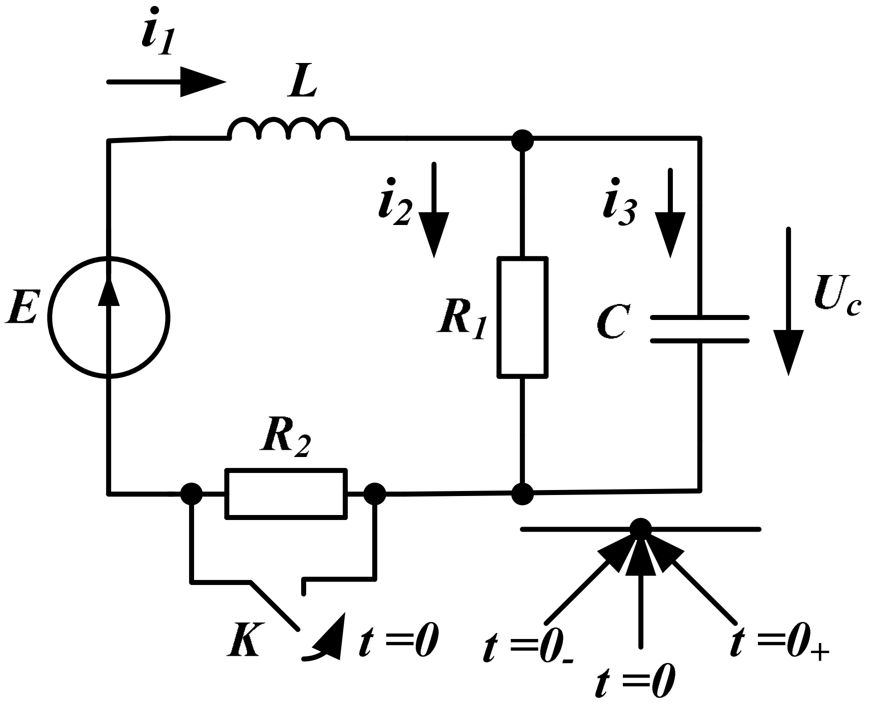
Стационарный процесс это математическая абстракция. Включения источников энергии, переключения в схемах нарушают стационарность и приводят к возникновению переходного процесса.

Переходным процессом называется неустановившийся, нестационарный процесс, возникший при переходе из одного режима работы к другому.

Всякие изменения и переключения в схеме называют *коммутацией.* В схеме рис.7.1 в момент t=0 происходит коммутация (в данном случае замыкание ключа). Режим работы цепи изменяется и возникает переходный процесс.

Считается, что *коммутация происходит мгновенно* в момент времени $t = 0$.

Параметры цепи:



$E = 120\,В, L = 10\,мГн, C = 68\,нФ,$

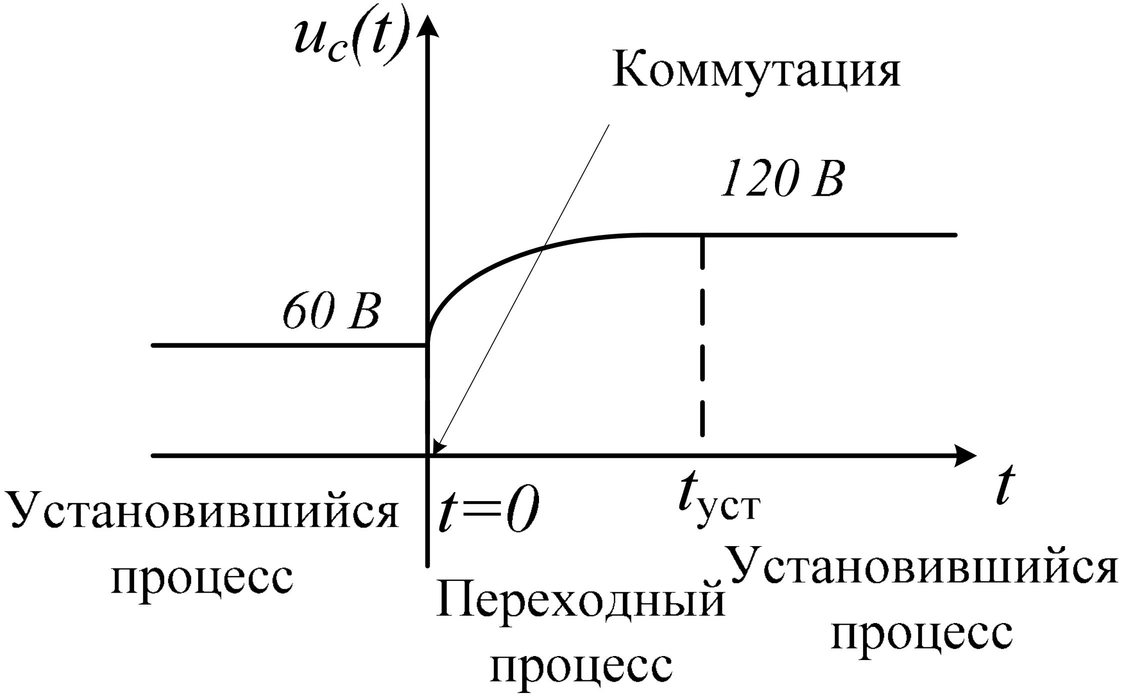
$R_1 = R_2 = 1кОм.$

$t = 0$ - момент коммутации;

$t = 0_-$ - момент, предшествующий коммутации;

$t = 0_+$ - момент времени, следующий сразу после коммутации.

Рис. 7.1. Схема цепи с коммутирующим ключом



Первый закон коммутации

$$i_1(0_-) = \frac{E}{R_1 + R_2} = \frac{120}{2 \cdot 10^3} = 60\,мА$$ -ток в индуктивности до коммутации;

$i_1(0_+)$ - ток в индуктивности сразу после коммутации.

Найдем связь между ними.

Напряжение самоиндукции: $u_L(t) = \dfrac{d\psi}{dt} = L\dfrac{di}{dt} \neq \infty$!!!

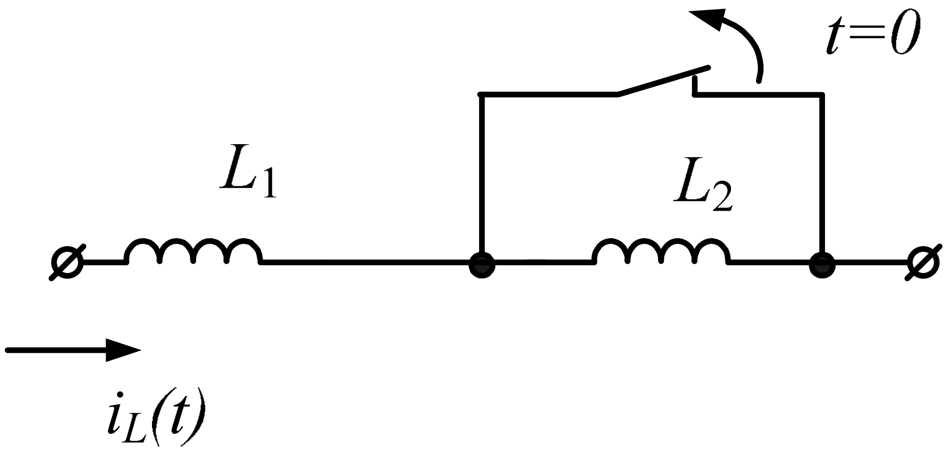
При неизменной индуктивности $\dfrac{di}{dt} \neq \infty$. Значит ток в индуктивности не может меняться скачком.

Формулировка первого закона коммутации**:**

*Ток в индуктивности до коммутации равен току в индуктивности в начальный момент после коммутации***:**

$$i_L(0_-) = i_L(0_+).$$

Если при коммутации изменяется индуктивность, действует *обобщенный первый закон коммутации для потокосцепления*:



$$\Psi(0_-)=\Psi(0_+).$$

$$\psi(0_-)=i_{L1}(0_-)\cdot L_1\ ,$$

$$\psi(0_+)=i_L(0_+)(L_1+L_2),$$

$$i_L(0_+)=\frac{i_{L1}(0_-)L_1}{L_1+L_2}$$

В индуктивности накоплена магнитная энергия $W_M(0_-)=\dfrac{L\cdot i_1^{\,2}(0_-)}{2}$. Энергия не может измениться мгновенно, так как мощность всегда ограничена ($p(t)=\dfrac{dW}{dt}\neq\infty$).

Второй закон коммутации:

До коммутации в момент $t=0_-$ напряжение на емкости $u_C(0_-)=\dfrac{E\cdot R_1}{R_1+R_2}=60\,B$. Найти $u_C(0_+)$.

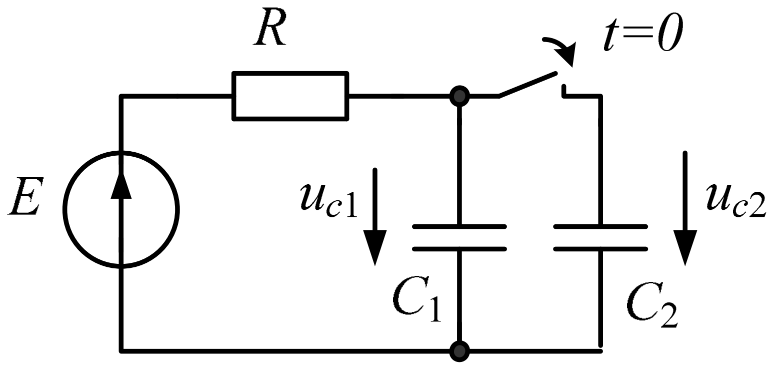
Ток в емкости $i_C(t)=\dfrac{dq}{dt}=C\dfrac{du_C}{dt}\neq\infty$!!! Напряжение на емкости не может меняться скачком.

Формулировка второго закона коммутации:

Напряжение на емкости до коммутации равно напряжению на емкости в начальный момент после коммутации:

$$u_C(0_-)=u_C(0_+).$$

Если при коммутации изменяется емкость, действует *обобщенный второй закон коммутации для зарядов*:



$$q(0_-) = q(0+).$$

$$q_1(0_-) + q_2(0_-) = q_1(0_+) + q_2(0_+).$$

$$q_1(0_-) = u_{C1}(0_-) \cdot C_1,$$

$$q_2(0_-) = u_{C2}(0_-) \cdot C_2,$$

$$u_C(0_+) = \frac{q_1(0_-) + q_2(0_-)}{C_1 + C_2}.$$

На емкости накоплена электрическая энергия $W_э(0_-) = \dfrac{C \cdot u^2{}_C(0_-)}{2} = W_э(0+)$. Электрическая энергия также не может изменяться мгновенно.

Расчет переходных процессов основан на использовании первого и второго закона коммутации.

Начальные условия (НУ)

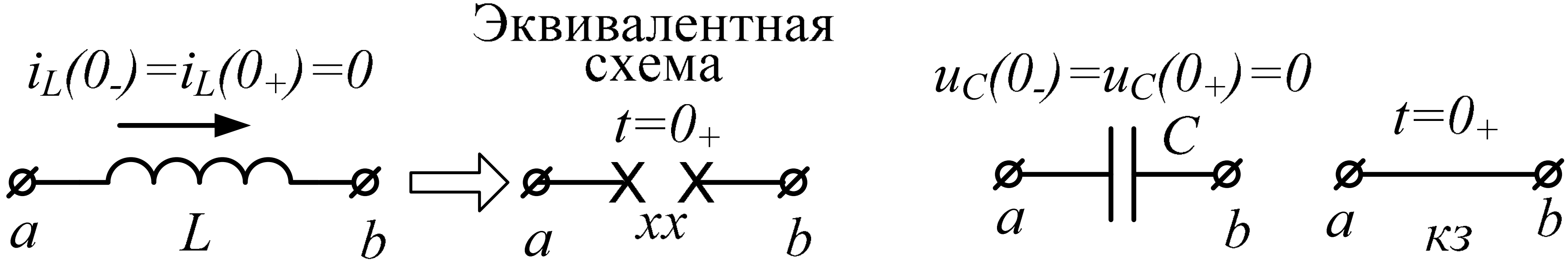
Независимые начальные условия - это значения токов через индуктивности и напряжений на емкостях, неизменяющиеся при коммутации и определяющие запас энергии в цепи ($i_{L1}.....i_{Ln}, u_{C1}.....u_{Cn}$).

Зависимые начальные условия - это значения остальных токов и напряжений, которые могут изменяться при коммутации ($u_{L1},..i_{C1},...u_{R}...i_{R}...$).

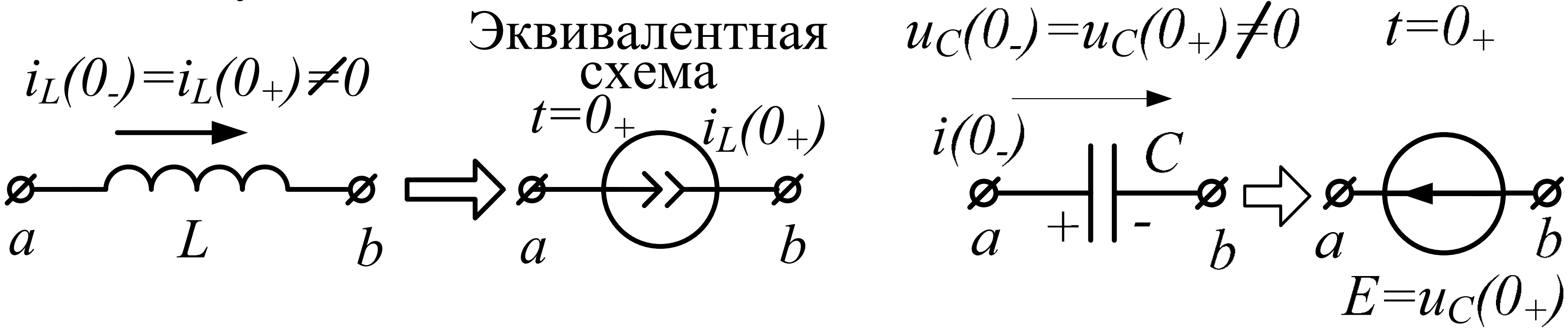
Докоммутационные НУ – это начальные условия при $t = 0_{-}$.

Послекоммутационные НУ- это начальные условия при $t = 0_{+}$.

Нулевые начальные условия – это равные нулю независимые начальные условия.

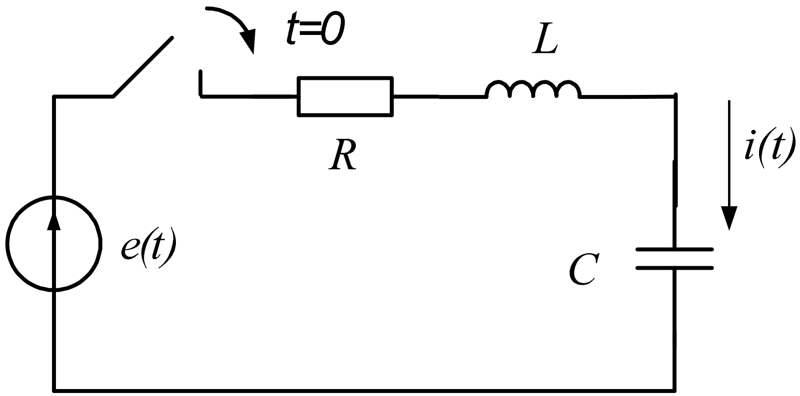


Ненулевые начальные условия - это неравные нулю независимые начальные условия.



Эквивалентные схемы индуктивности и емкости можно использовать для расчета зависимых НУ при $t=0_+$.

Классический метода расчета переходного процесса



$$t \geq 0$$

В послекоммутационной схеме по второму закону Кирхгоффа:

$$iR + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int i dt = e(t) \quad (1).$$

i(t) – переходной ток (полный ток).

После коммутации $t \to \infty$ установится принужденный режим:

$$i_{np}R + L\frac{di_{np}}{dt} + \frac{1}{C}\int i_{np} dt = e(t) \quad (2).$$

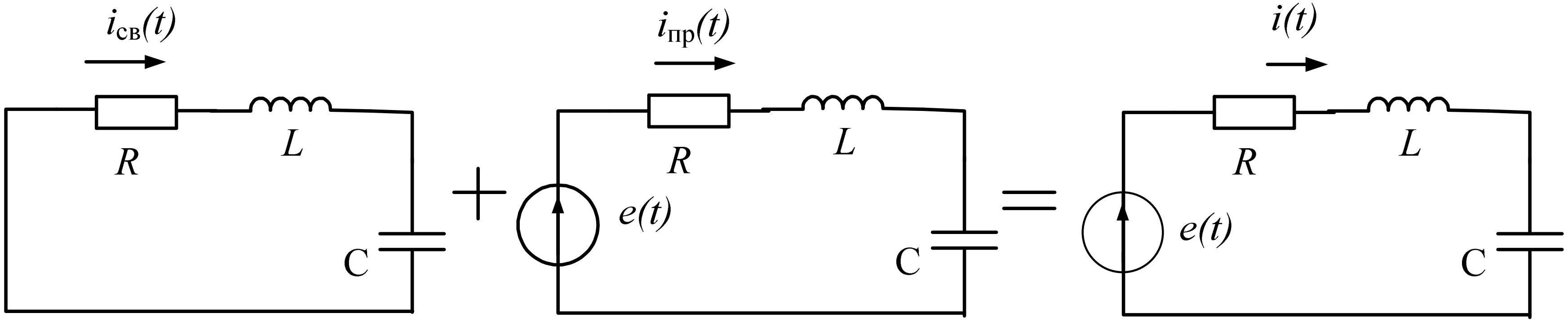
Обозначим $i_{своб}(t) = i(t) - i_{np}(t)$ - свободный ток.

Из (1) вычитаем (2):

$$(i - i_{пр})R + L\frac{d(i - i_{пр})}{dt} + \frac{1}{C}\int (i - i_{пр})dt = e(t) - e(t);$$

$$i_{св}R + L\frac{di_{св}}{dt} + \frac{1}{C}\int i_{св}dt = 0 \quad (3),\ U_{Rсв} + U_{Lсв} + U_{Cсв} = 0.$$

Уравнениям (1)-(3) соответствуют схемы:



Свободный процесс

$t \to \infty$
Принужденный процесс

$t>0$
Полный переходной процесс

Полный переходный процесс складывается из принужденного процесса, начавшегося бесконечно давно, и затухающего свободного процесса. Свободный процесс компенсирует неравенство энергии полной и принужденной схемы в момент $t=0$. Свободный процесс обязательно затухает, так как в схеме нет источников.

Полный переходной процесс всегда есть сумма свободного процесса и принужденного.

$$i_L(t)=i_{Lсв}(t)+i_{Lпр}(t);u_C(t)=u_{Cсв}(t)+u_{Cпр}(t);u_R(t)=u_{Rсв}(t)+u_{Rпр}(t).$$

Принужденный процесс это частное решение неоднородного дифференциального уравнения (2) при $t \to \infty$. Для постоянного или гармонического источника энергии принужденный процесс рассчитывают методами расчета цепей постоянного и переменного тока.

Свободный процесс это общее решение однородного дифференциального уравнения (3).

$$Ri_{св}(t)+L\frac{di_{св}}{dt}+\frac{1}{C}\int i_{св}dt=0.$$

Решение имеет вид: $i_{св}(t)=A_1e^{p_1t}+A_2e^{p_2t}....+A_ne^{p_nt}$,

где:

p_1, p_2 …p_n - некратные (простые) корни характеристического уравнения;

A_1…A_n - постоянные интегрирования, определяемые в послекоммутационной схеме с учетом независимых НУ.

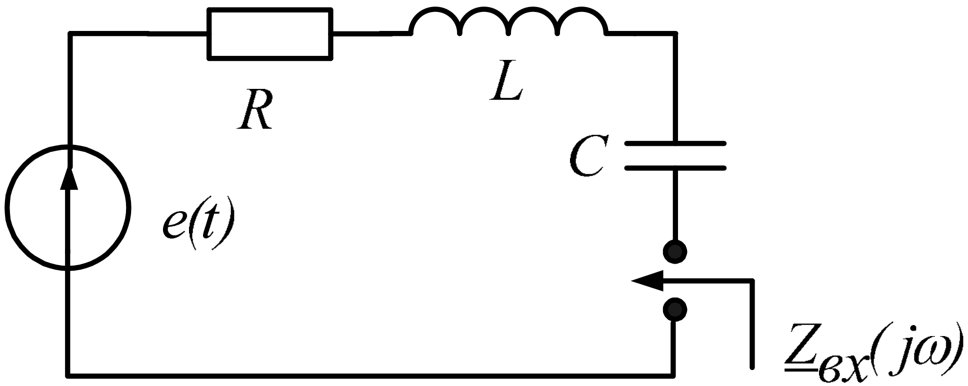
Способы составления характеристического уравнения

Первый способ

В дифференциальном уравнении заменяем $\frac{d}{dt}\Rightarrow p;\int\Rightarrow\frac{1}{p}$.

Получаем характеристическое уравнение: $R + pL + \dfrac{1}{pC} = 0.$

Второй способ



В схеме после коммутации разрываем любую ветвь цепи и находим $\underline{Z}_{вх}(\,j\omega\,)$.

$$\underline{Z}_{вх}(\,j\omega\,) = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}.$$

Заменяем $j\omega$ на p, получаем $R + pL + \dfrac{1}{pC} = 0$ - *характеристическое уравнение*.

Получили квадратное уравнение: $p^2LC + RCp + 1 = 0.$

Число корней характеристического уравнения равно его степени. Степень характеристического уравнения равна числу независимых начальных условий в послекоммутационной схеме.

Определение постоянных интегрирования

Для цепи второго порядка имеем:

$$i_{св}(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} \ .$$

Известны p_1 и p_2. Требуется найти A_1 и A_2. Составляем два уравнения для $t = 0_+$:

$$i_{св}(0_+) = A_1 e^{p_1(0_+)} + A_2 e^{p_2(0_+)} = A_1 + A_2 = i(0_+) - i_{пр}(0_+) \ (1).$$

Дифференцируем (1):

$$\frac{di_{св}(t)}{dt} = A_1 p_1 e^{p_1 t} + A_2 p_2 e^{p_2 t} \ .$$

Пусть $t = 0_+$. $\left.\dfrac{di_{св}(t)}{dt}\right|_{t=0_+} = A_1 p_1 + A_2 p_2$ (2).

Решаем (1) и (2) и находим A_1 и A_2.

Надо найти $i_{св}(0_+)$ и $\left.\dfrac{di_{св}(t)}{dt}\right|_{t=0_+}$ в послекоммутационной схеме с учетом законов коммутации.

Рекомендуется решать задачу относительно $i_L(t)$ *или* $u_C(t)$.

Если ищем $i(t) = i_L(t)$, то $i_{Lсв}(0_+) = i_L(0_+) - i_{Lпр}(0_+)$;

$$L\frac{di_L(t)}{dt} = u_L(t).$$

Находим: $\left.\dfrac{di_{Lсв}(t)}{dt}\right|_{t=0_+} = \dfrac{u_{Lсв}(0_+)}{L} = \dfrac{u_L(0_+) - u_{Lпр}(0_+)}{L}$.

Если ищем $u_C(t)$.

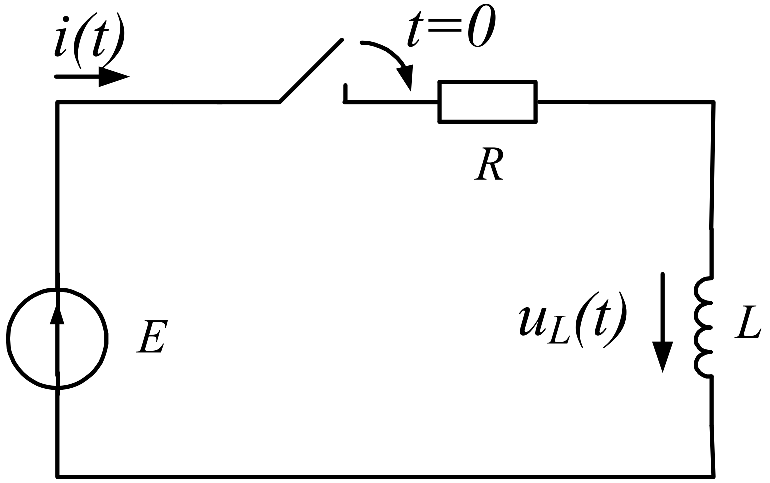
$u_{Cсв}(0_+) = u_C(0_+) - u_{Cпр}(0_+)$.

$$C\frac{du_{Cсв}(t)}{dt} = i_{Cсв}(t) = i_C(t) - i_{Cпр}(t).$$

$$\left.\frac{du_{Cсв}(t)}{dt}\right|_{t=0_+} = \frac{i_C(0_+) - i_{Cпр}(0_+)}{C}$$

Переходные процессы в цепях первого порядка

Включение постоянной ЭДС в RL-цепь



Дано: L=1 Гн, R=2 Ом, E=4 В.
Найти ток в цепи после коммутации.

Последовательность расчета переходного процесса классическим методом

1. Расчет режима до коммутации $\left(t=0_{-}\right)$, определение независимых НУ:

$$i_L(0-)=0=i_L(0+).$$

2. Расчет принудительного режима, ключ замкнут $(t \to \infty)$:

$$i_{Lnp} = \frac{E}{R} = 2A.$$

3. Составляем дифференциальное уравнение цепи после коммутации $(t \geq 0)$:

$$iR + L\frac{di}{dt} = E, \quad 2i + 1\frac{di}{dt} = 4B.$$

4. Составляем характеристическое уравнение цепи. Заменяем $\dfrac{d}{dt} \to p$:

$$pL + R = 0.$$

Находим корень характеристического уравнения:

$$p_1 = -\frac{R}{L} = -2\frac{1}{C} = -\alpha,$$

α - коэффициент затухания.

Записываем выражение для свободного тока:

$$i_{св}(t) = A_1 e^{p_1 t} = A_1 e^{-\frac{R}{L}t} = A_1 e^{-\alpha \cdot t} = A_1 e^{-2t}.$$

5. Расчет постоянной интегрирования A_1 :

$$A_1 = i_{св}(0_+) = i_L(0_+) - i_{Lпр}(0_+) = 0 - \frac{E}{R} = -\frac{E}{R} = -2\,A.$$

6. Свободная составляющая тока в цепи:

$$i_{Lсв}(t) = -\frac{E}{R} e^{-\frac{R}{L}t} = -2e^{-2t}\,A.$$

7. Находим полный ток:

$$i_L(t)=i_{пр}(t)+i_{св}(t)=\frac{E}{R}-\frac{E}{R}e^{-\frac{R}{L}t}=\frac{E}{R}(1-e^{-\frac{R}{L}t})=2(1-e^{-2t})A$$

Ответ: полный ток $i_L(t)=2(1-e^{-2t})A$.

Постоянная времени цепи

Величина, обратная коэффициенту затухания α, называется постоянной времени цепи $\tau=\dfrac{1}{\alpha}=\dfrac{L}{R}$.

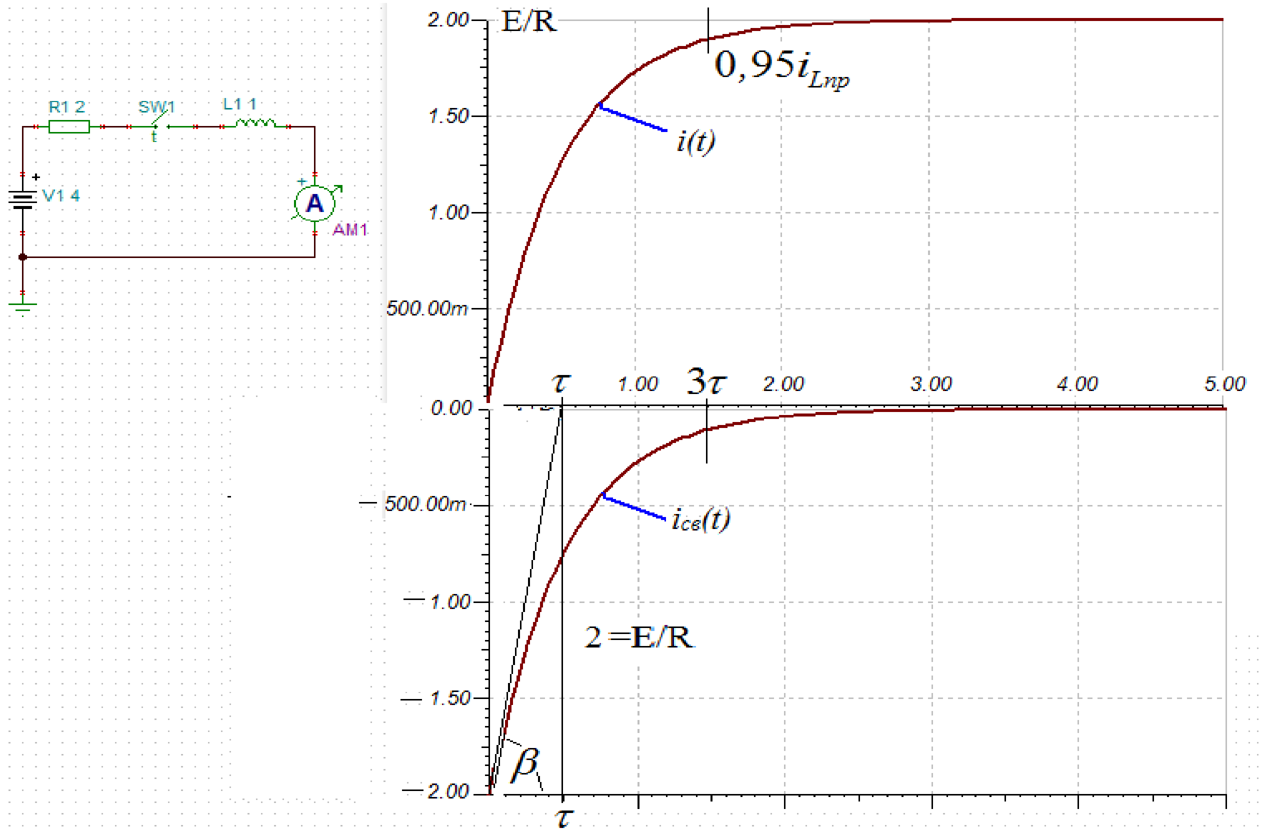
Запишем полный ток: $i(t)=\dfrac{E}{R}-\dfrac{E}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}=2-2e^{-\frac{t}{\tau}}A$.

Свободный ток: $i_{св}(t)=-2e^{-\frac{t}{\tau}}A,\;\; i_{св}(0+)=-\dfrac{E}{R}=-2.$

Найдем производную к свободному току при $t=0+$.

$$\left.\frac{di_{св}}{dt}\right|_{t=0_+} = \frac{d}{dt}\left(-2e^{-\frac{t}{\tau}}\right)_{t=0_+} = (-2)\left(-\frac{1}{\tau}\right)e^{-\frac{t}{\tau}}\Big|_{t=0_+} = \frac{2}{\tau} = tg\beta.$$

RL-переход.TSC



Выводы:

Касательная к свободному процессу при $t=0$ отсекает на оси t отрезок, равный τ.

При $t=3\tau$ свободный ток $i_{св}(3\tau)=-\dfrac{E}{R}e^{-3}=-\dfrac{E}{R}(0{,}05)$, полный ток $i(3\tau)=\dfrac{E}{R}(1-e^{-3})=\dfrac{E}{R}(1-0{,}05)=0{,}95i_{пр}$ и переходной процесс считается установившимся.

e=2,7183

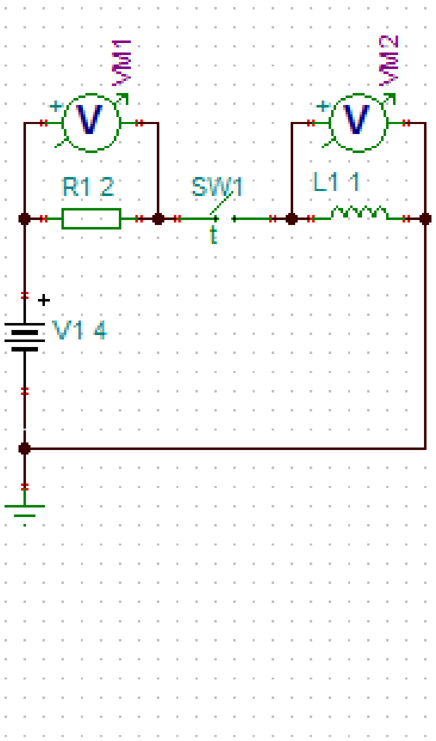
t	0	τ	2 τ	3 τ	4 τ	5 τ
$1-e^{-\frac{t}{\tau}}$	0	0,63	0,86	0,95	0,98	0,99
$e^{-\frac{t}{\tau}}$	1	0,368	0,14	0,05	0,02	0,01

Найдем напряжения на сопротивлении и индуктивности:

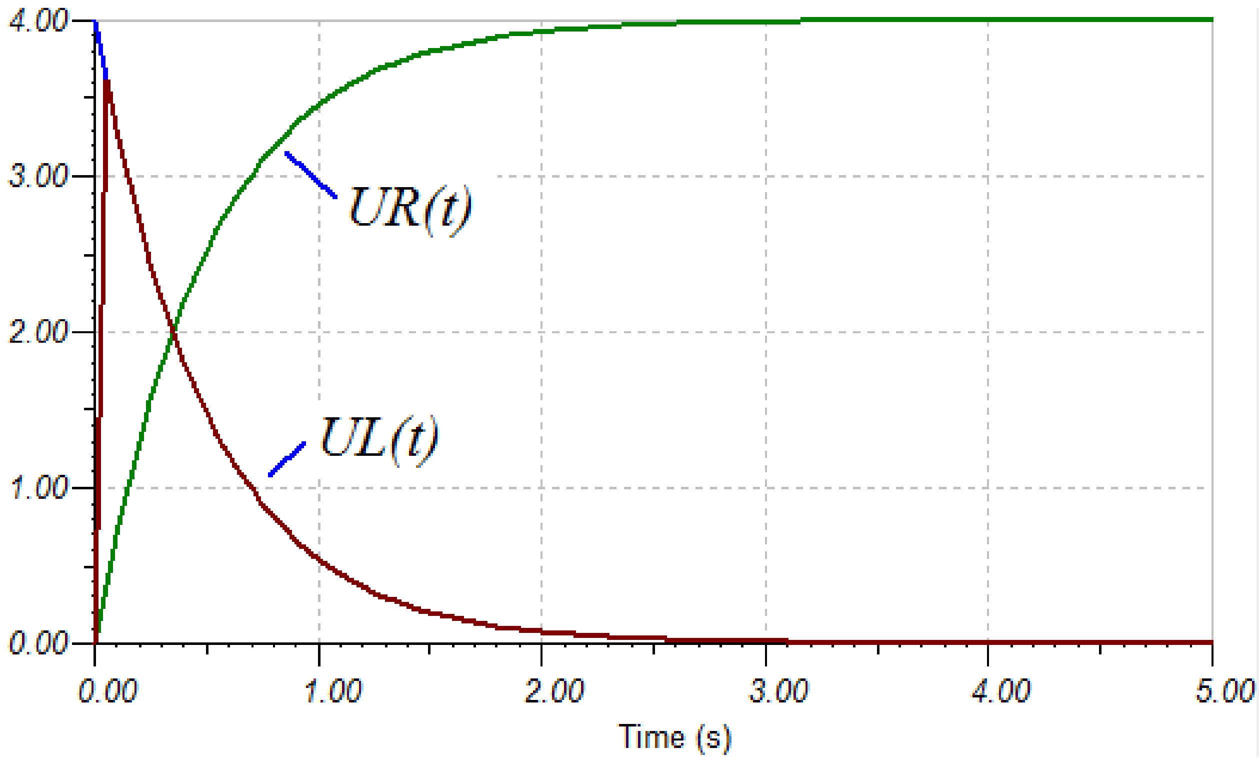
$$u_R(t) = Ri(t) = E - Ee^{-\frac{t}{\tau}},$$

$$u_L(t) = L\frac{di}{dt} = L\frac{d}{dt}\left[\frac{E}{R} - \frac{E}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}\right] = -\frac{E}{R}L(-\frac{1}{\tau})e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{L}{\frac{L}{R}}\frac{E}{R}e^{-\frac{t}{\tau}} = Ee^{-\frac{t}{\tau}}.$$

По второму закону Кирхгофа $u_R(t) + u_L(t) = E$.

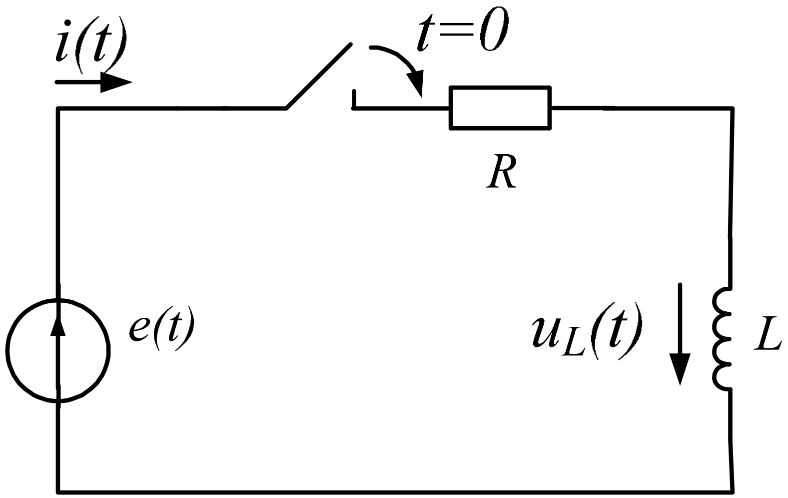


VM1
VM2
R1 2
SW1
L1 1
V1 4



4.00
3.00
2.00
1.00
0.00
UR(t)
UL(t)
0.00
1.00
2.00
3.00
4.00
5.00
Time (s)

Включение в *RL*-цепь гармонической ЭДС



$$e(t) = E_m \sin(\omega t + \psi)$$

1. Расчет режима до коммутации $i_L(0-) = 0 = i_L(0+)$.

2. Расчет принудительного режима символическим методом: $\underline{E}_m = E_m e^{j\psi}$.

$$\underline{I}_{mnp} = \frac{\underline{E}_m}{\underline{Z}} = \frac{E_m e^{j\psi}}{Ze^{j\varphi}} = I_{mnp} e^{j(\psi - \varphi)}, \quad \text{где:} \quad Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2},$$

$$\varphi = arctg \frac{\omega L}{R}.$$

Находим мгновенное значение принужденного тока: $i_{np}(t) = I_{mnp} \sin(\omega t + \psi - \varphi), i_{np}(0+) = I_{mnp} \sin(\psi - \varphi).$

3. Составляем дифференциальное уравнение:

$$iR + L\frac{di}{dt} = E_m \sin(\omega t + \psi).$$

4. Характеристическое уравнение: $pL + R = 0,$

корень характеристического уравнения: $p_1 = -\dfrac{R}{L}.$

5. Свободный ток: $i_{св}(t) = Ae^{p_1 t} = Ae^{-\frac{R}{L}t} = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$.

6. Находим постоянную интегрирования:

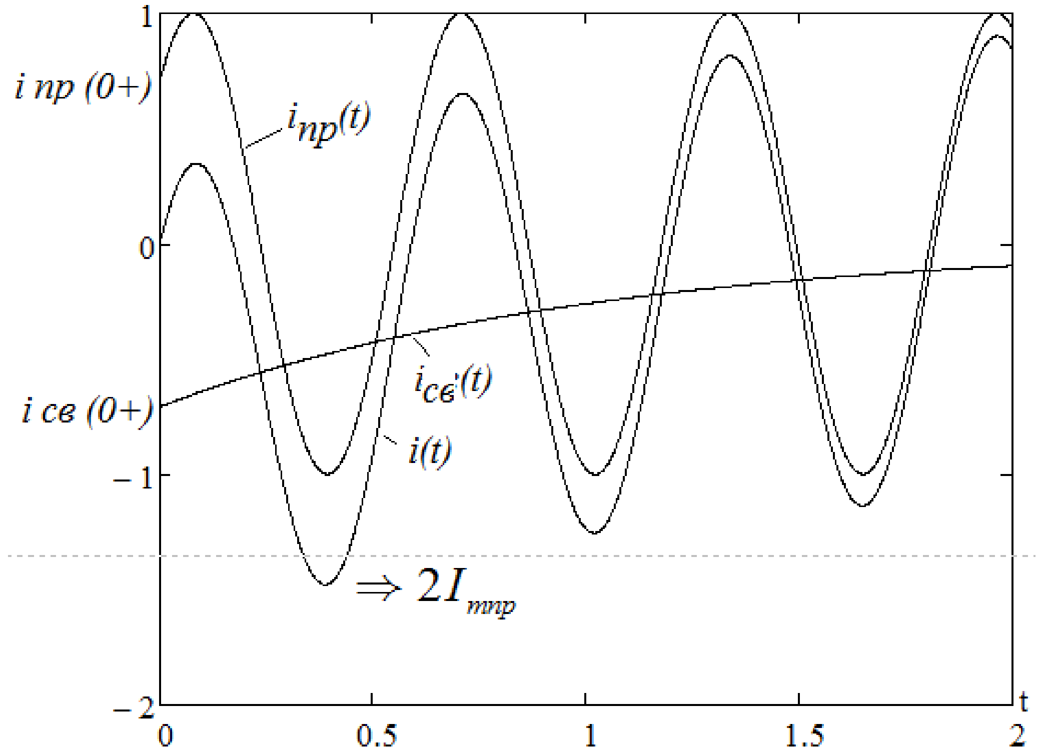
$$A = i_{св}(0+) = i(0+) - i_{пр}(0+) = 0 - I_m \, sin(\psi - \varphi)$$

7. Находим полный ток:

$$i(t) = I_{mпр} \, sin(\omega t + \psi - \varphi) - I_{mпр} \, sin(\psi - \varphi) e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Свободный ток зависит от фазы ЭДС при t=0. Если $\psi - \varphi = 0$, то $i_{св}(t) = 0$. В общем случае $i_{св}(0_+) + i_{пр}(0_+) = i(0_+) = 0$.

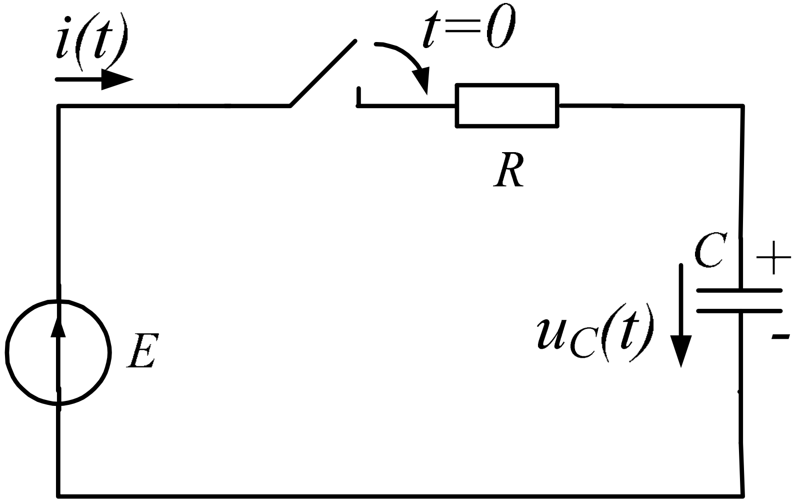
В Mathcad рассчитаны графики для ω=10 1/с, τ=1 с, $(\psi - \varphi) = 45^o$.



Перенапряжение в R,L цепи: При $\psi - \varphi = \pm\dfrac{\pi}{2}$, то

$i(t) = \pm I_m cos(\omega t) \mp I_m e^{-\frac{t}{\tau}}$. Если τ – большая, возникает перенапряжение и ток достигнет $2I_{mпр}$.

Включение в RC-цепь постоянной ЭДС



Начальные условия:
$U_C(0_-) = U_C(0_+) = U_0.$

Решаем задачу для $u_C(t)$.

1. Расчет режима до коммутации $U_C(0_-) = U_C(0_+) = U_0.$

2. Расчет принужденного режима:

$i_{Cпр} = 0, E = i_{Cпр} R + u_{Cпр}, E = u_{Cпр}.$

3.Дифференциальное уравнение:

$$e(t) = iR + u_C(t); i_R = i_C = C\frac{du_C}{dt};$$

$$RC\frac{du_C}{dt} + u_C = e(t).$$

4. Характеристическое уравнение:

$$RCp + 1 = 0; \;\; p_1 = -\frac{1}{RC} = -\alpha .$$

Свободная составляющая: $u_{C_{св}}(t) = Ae^{p_1 t} = Ae^{-\frac{t}{RC}} = Ae^{-\frac{t}{\tau}}.$

$$\tau = RC[Ом \cdot Ф] = \left[Ом \cdot \frac{А \cdot с}{В}\right] = с.$$

5. Находим постоянную интегрирования *A*:

$$A = u_{Cсв}(0_+) = u_C(0_+) - u_{Cпр} = U_0 - E.$$

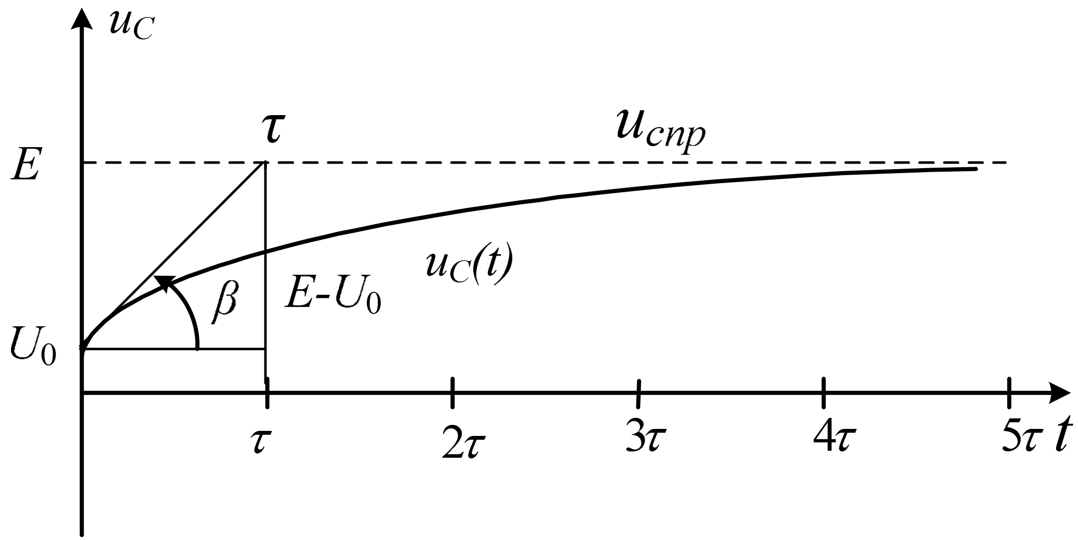
6. Свободная составляющая: $u_{Cсв}(t) = (U_0 - E)e^{-\frac{t}{\tau}}$.

7. Полный переходной процесс:

$$u_C(t) = u_{Cпр}(t) + u_{Cсв}(t) = E + (U_0 - E)e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

График полного переходного процесса:

Найдем производную к переходному процессу при $t = 0$:

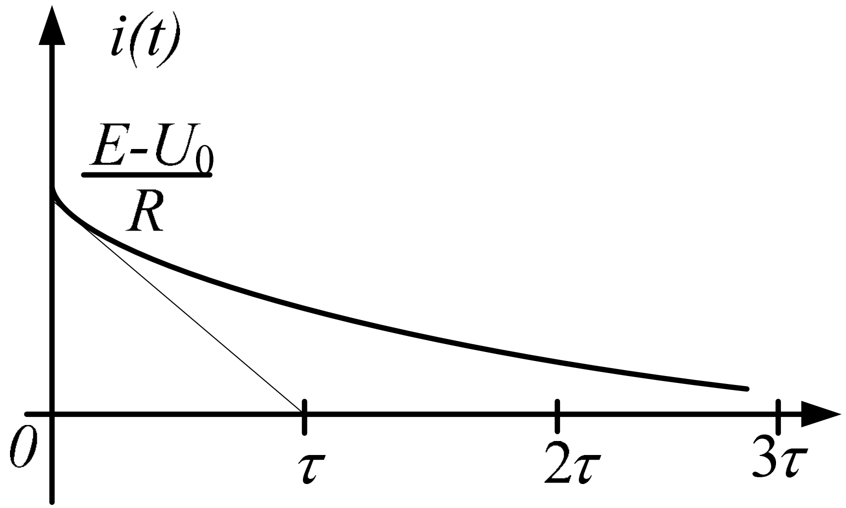


$$\frac{du_C(t)}{dt} = \left(-\frac{1}{\tau}\right)\left(-\left(E-U_0\right)\right)e^{-\frac{t}{\tau}}\Big|_{(t=0)} = \frac{E-U_0}{\tau} = tg\beta .$$

Вывод: касательная к переходному процессу при $t = 0$ отсекает на линии принужденного режима отрезок равный τ.

Ток в цепи:

$$i(t) = C\frac{du_C(t)}{dt} = C\left(-\frac{1}{\tau}\right)\left(-\left(E - U_0\right)\right)e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{E - U_0}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}.$$



Напряжение на резисторе:

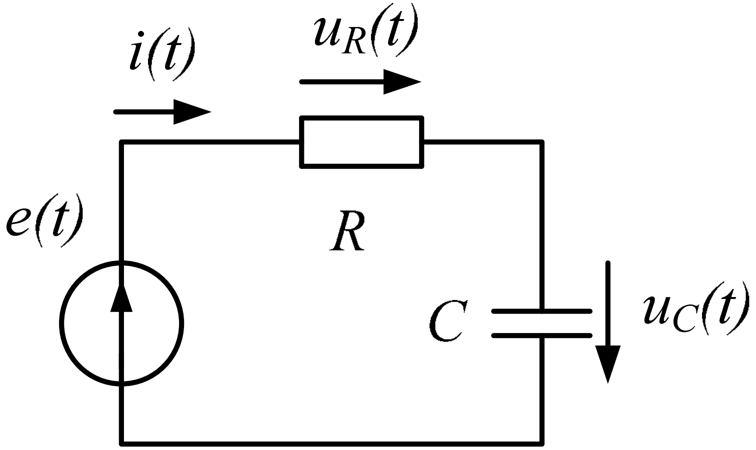
$$u_R(t) = Ri(t) = \left(E - U_0\right)e^{-\frac{t}{\tau}} = E - u_C(t).$$

Выводы: $u_c(t)$ меняется аналогично $i_L(t)$ в RL – цепи;

$i(t)$ меняется аналогично $u_L(t)$ в RL – цепи.

Дифференцирующие и интегрирующие цепи

Интегрирующая RC-цепь



$$e(t) = u_R(t) + u_C(t) = iR + u_C = RC\frac{du_C}{dt} + u_C.$$

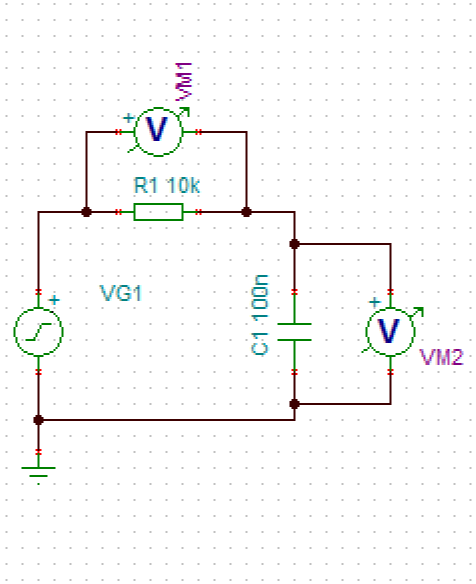
Пусть $\tau = RC \gg$(большое). При этом:

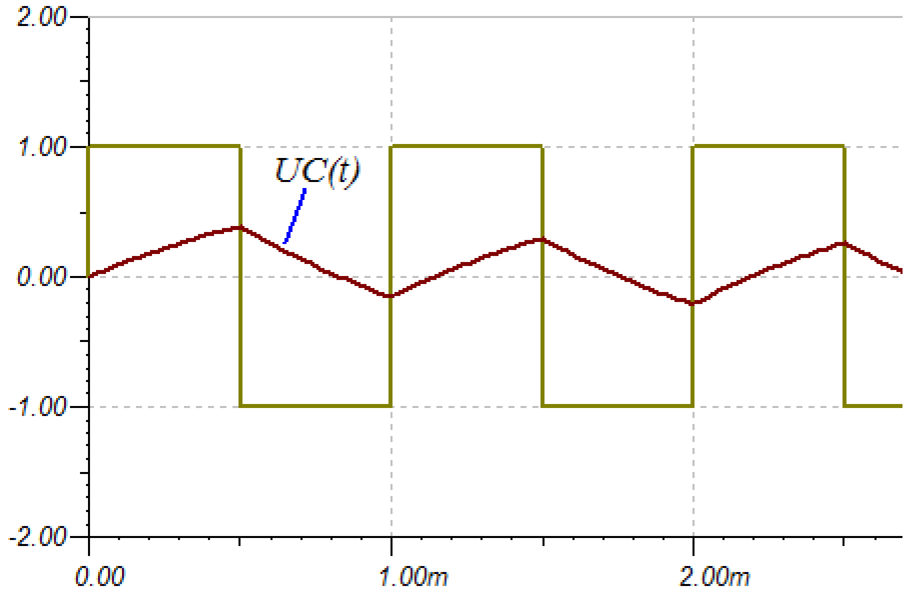
$$R \gg, C \gg, \text{ а } X_C = \frac{1}{\omega C} \ll.$$

Тогда: $e(t) \approx u_R(t) = RC\dfrac{du_C}{dt}$.

Выходной сигнал снимаем с емкости: $u_C(t) \approx \dfrac{1}{RC}\int_0^t e(t)dt$.

RC-INT-DIF.TSC



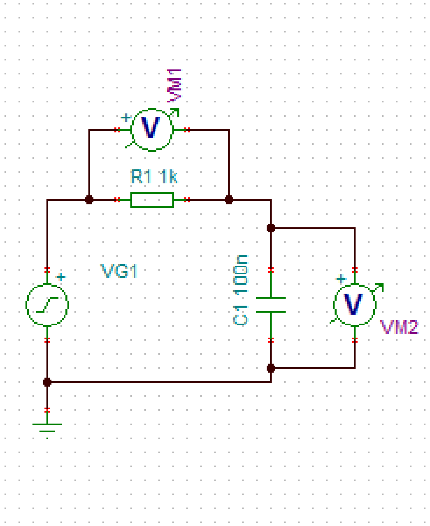


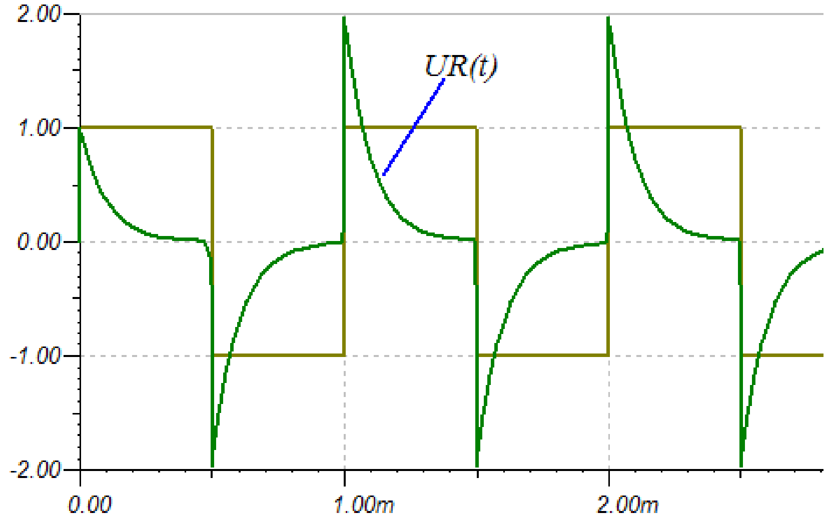
Дифференцирующая RC- цепь

Пусть $\tau = RC \ll$ (малое). При этом $R \ll$, $C \ll$, а $X_C = \dfrac{1}{\omega C} \gg$. Тогда: $e(t) \approx u_C(t)$.

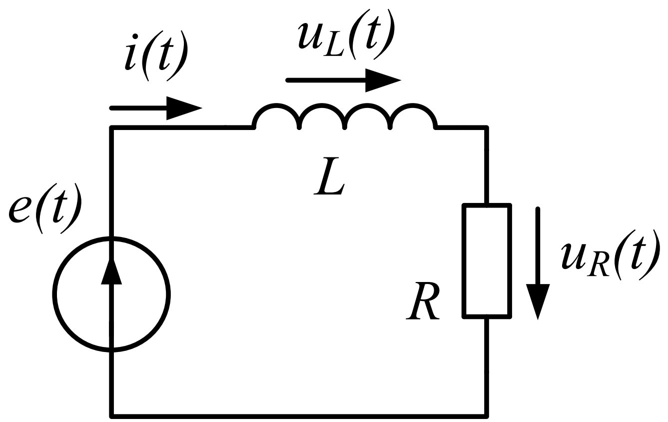
Выходной сигнал снимаем с сопротивления:

$$u_R(t) = RC\frac{du_C}{dt} = \tau\frac{de}{dt}.$$





Интегрирующая *RL* - цепь



$$e(t) = u_L(t) + u_R(t) = L\frac{di}{dt} + iR.$$

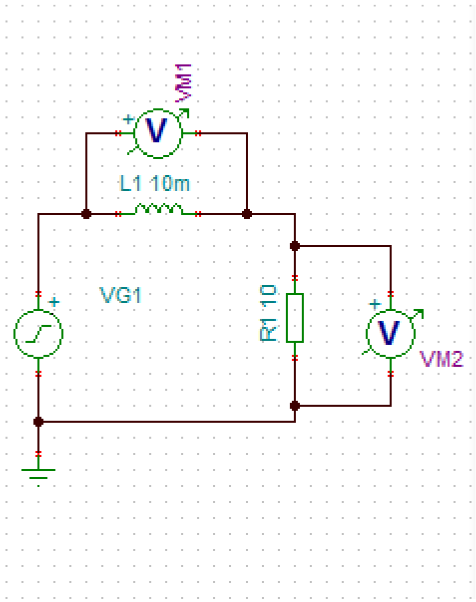
Пусть $\tau = \dfrac{L}{R} \gg$. При этом $L \gg$, $R \ll$, а $X_L = \omega L \gg$.

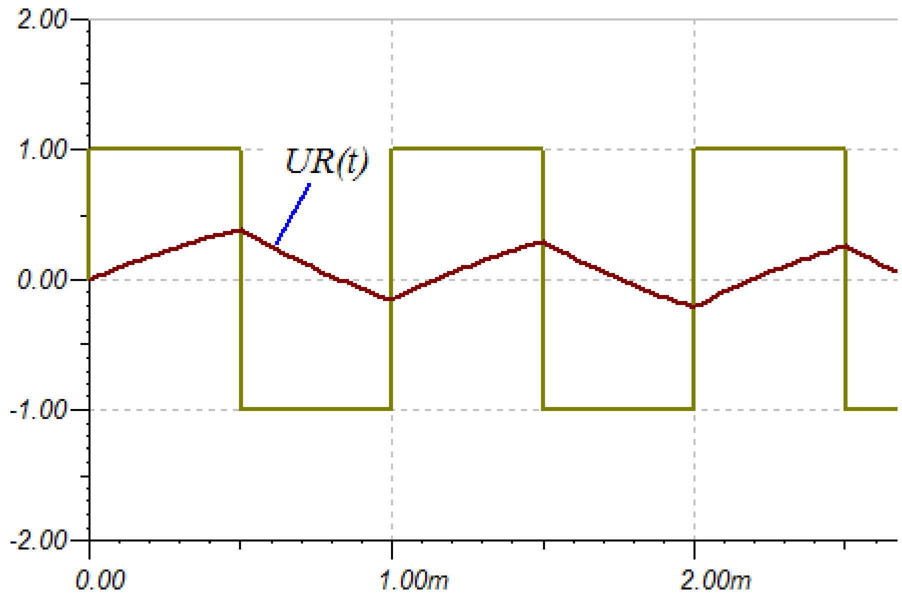
Тогда $e(t) \approx u_L(t) = L\dfrac{di}{dt}$. $\quad i \approx \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_0^t e(t)dt$.

Выходной сигнал снимаем с сопротивления:

$$u_R(t) = iR \approx \frac{R}{L}\int_0^t e(t)dt = \frac{1}{\tau}\int_0^t e(t)dt.$$

RL-INT-DIF.TSC

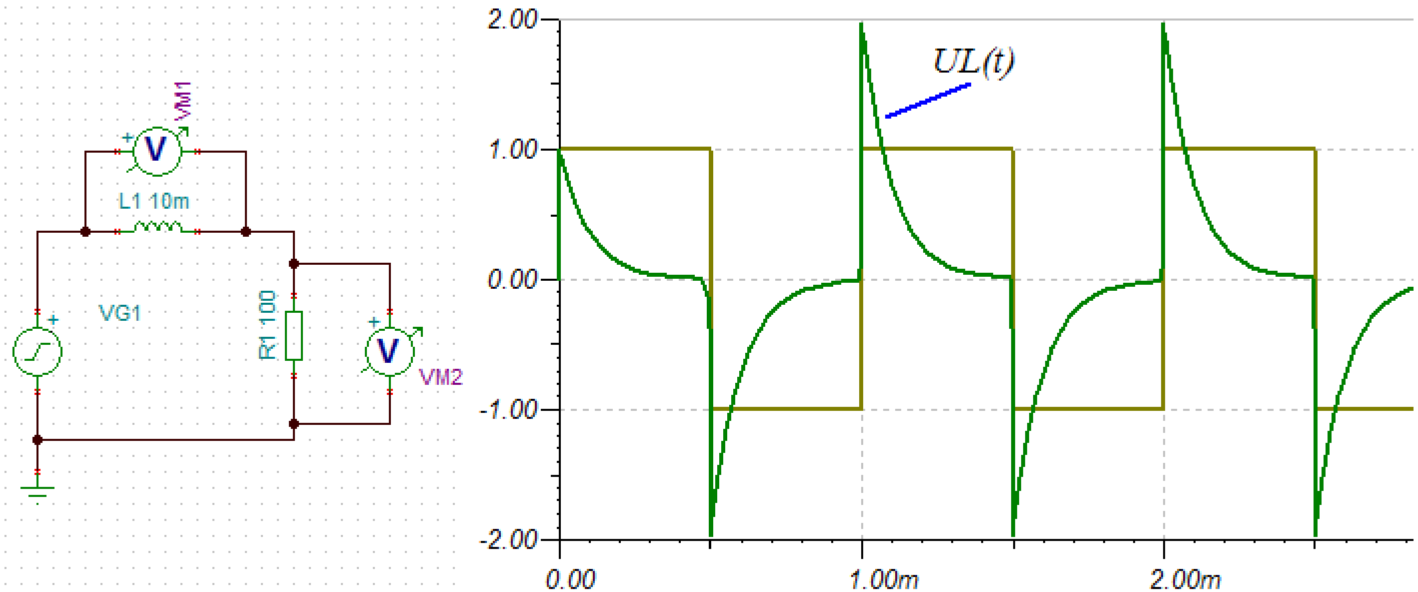




Дифференцирующая RL-цепь

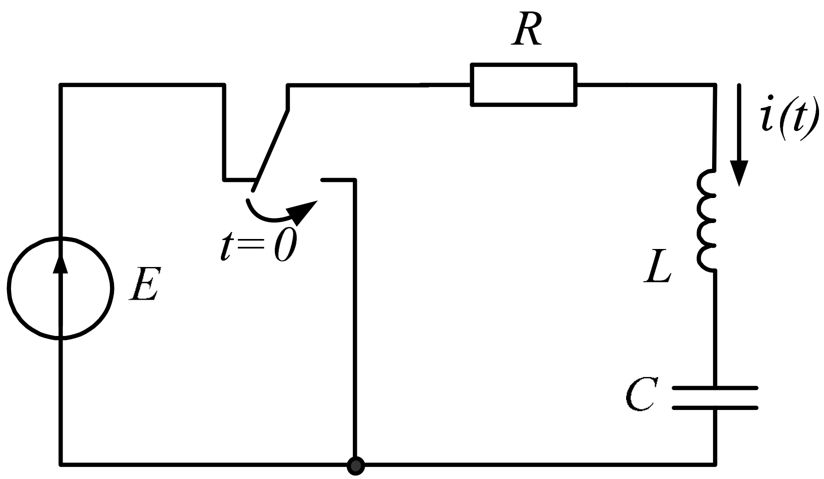
Пусть $\tau = \dfrac{L}{R} \ll$. При этом $L \ll$, $R \gg$, а $X_L = \omega L \ll$.

Тогда $e(t) \approx u_R(t) = iR$. $\quad u_L = L\dfrac{di}{dt} = \dfrac{L}{R}\dfrac{de}{dt} = \tau\dfrac{de}{dt}$.


VM1
L1 10m
VG1
R1 100
VM2
UL(t)
2.00
1.00
0.00
-1.00
-2.00
0.00
1.00m
2.00m

Переходные процессы в цепях второго порядка

Разряд емкости в RLC-цепи



$$e(t) = E = const$$

1. Расчет режима до коммутации:

$$u_C(0_-) = u_C(0_+) = E;$$

$$i_L(0_-) = i_L(0_+) = 0.$$

2. Расчет принужденного режима:

$$u_{Cпр}(t) = 0,\ i_{Lпр}(t) = 0.$$

3. Дифференциальное уравнение ($t \geq 0$).

$$Ri + L\frac{di}{dt} + u_C = 0;\ i = C\frac{du_C}{dt};$$

$$RC\frac{du_C}{dt} + LC\frac{d^2u_C}{dt^2} + u_C = 0;$$

$$\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{R}{L}\cdot\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC}u_C = 0.$$

4. Характеристическое уравнение:

$$p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{1}{LC} = 0.$$

Обозначим $\delta = \dfrac{R}{2L}, \omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ - частота незатухающих колебаний.

Получим: $p^2 + 2\delta p + \omega_0 = 0$.

Корни характеристического уравнения:

$$p_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0{}^2}\,.$$

Возможны 3 случая:

1-й случай – апериодический переходной процесс.

Корни p_1 и p_2 *– вещественные, отрицательные и разные.*

Для этого должно быть: $\delta^2 - \omega_0{}^2 > 0$, $\delta > \omega_0$, $\dfrac{R}{2L} > \omega_0$,

$$R > 2\omega_0 L = 2\rho = 2\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

В этом случае напряжение на емкости ищем в следующем виде:

$$u_{C св}(t) = B_1 e^{p_1 t} + B_2 e^{p_2 t}.$$

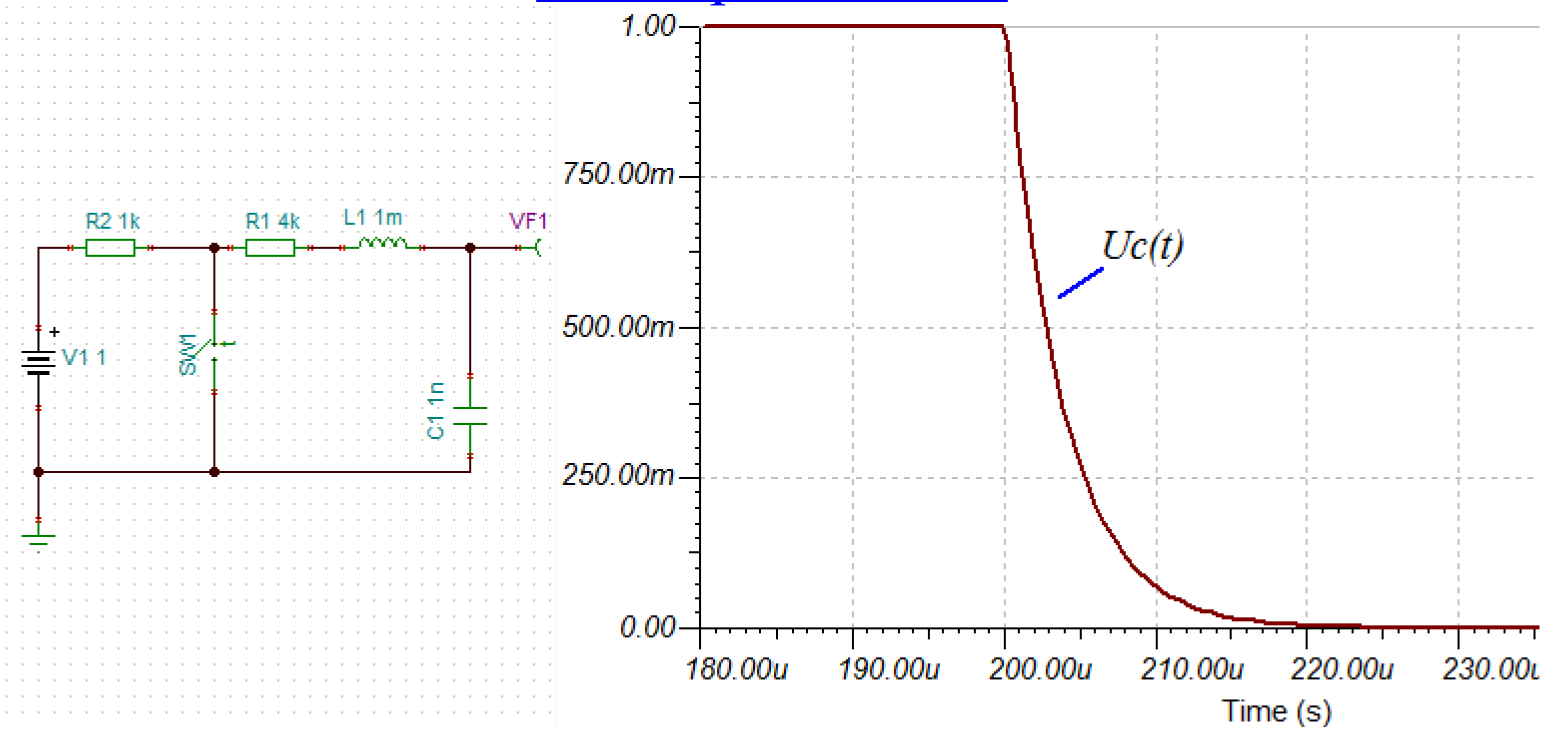
Переходной процесс описывается двумя экспоненциальными функциями с действительными отрицательными и разными показателями.

Такой переходной процесс не совершает периодических колебаний и называется апериодическим.

Пример: в цепи L=1 мГн, C=1 нФ, $\rho = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{10^{-3}}{10^{-9}}} = 10^3$ Ом.

Проведем моделирование для случая $R = 4\,кОм > 2\rho$.

[RLC-aperiod.TSC]()



Апериодический переходной процесс (R=4 кОм=4ρ).

2-й случай – критический переходной процесс.

Корни $p_1 = p_2 = -\delta$- *вещественные, отрицательные и равные.*

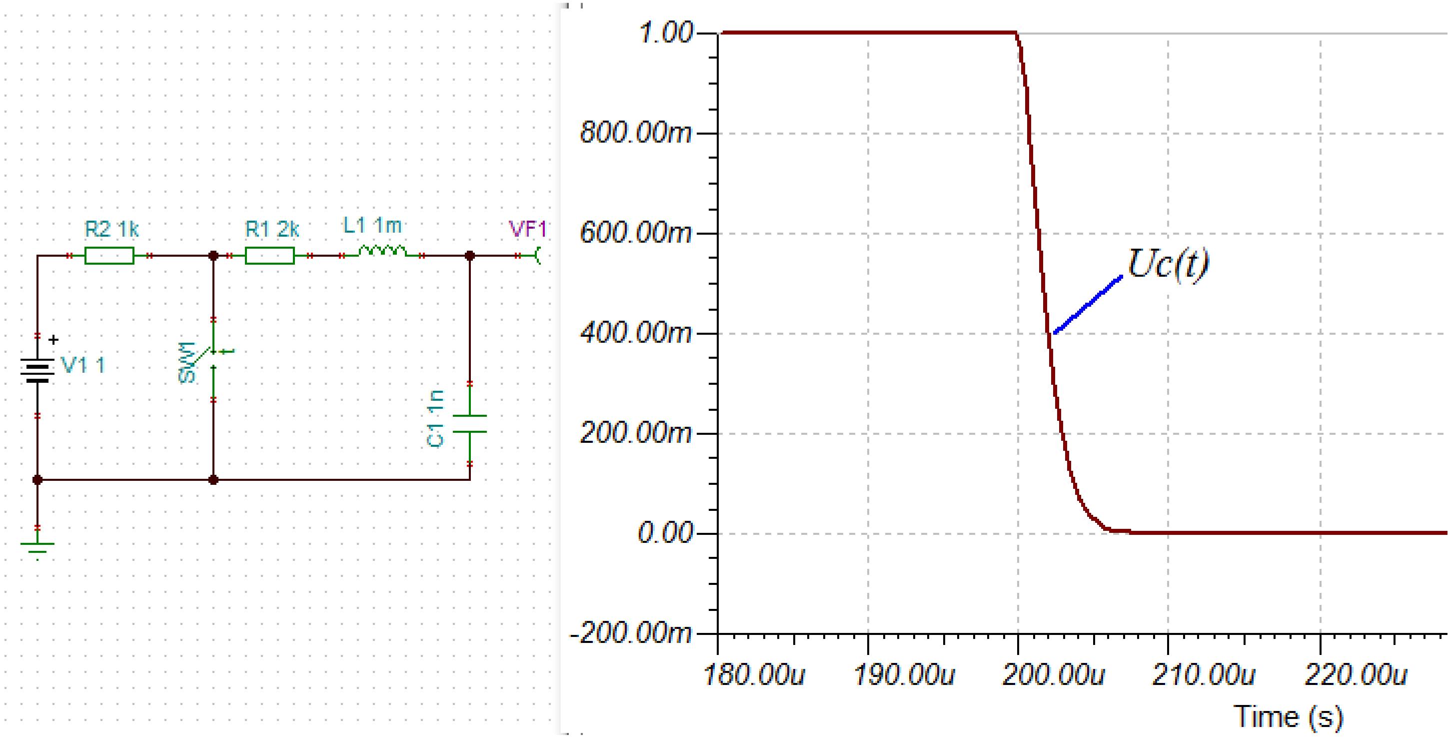
При этом: $\delta = \omega_0, \dfrac{R}{2L} = \omega_0, R = 2\sqrt{\dfrac{L}{C}} = 2\rho.$

Решение дифференциального уравнения ищем в виде:

$$u_{C\text{св}}(t) = (B_1 + B_2 t)e^{-\delta t}.$$

С учетом начальных условий получим полное решение:

$$u_{C\text{св}}(t) = E(1 + \delta t)e^{-\delta t} = u_C(t).$$



Критический переходной процесс (*R*=2 кОм=2*ρ*)

График критического переходного процесса аналогичен апериодическому, но характер изменения более быстрый.

3-й случай – колебательный переходной процесс

Запишем корни: $p_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$.

Если $\delta < \omega_0; \dfrac{R}{2L} < \dfrac{1}{\sqrt{LC}}; R < 2\rho$,

подкоренное выражение $\delta^2 - \omega_0^2 < 0$ будет отрицательным и получим два комплексно-сопряженных корня:

$$p_{1,2} = -\delta \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = -\delta \pm j\omega_c,$$

где $\omega_c = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ - угловая частота свободных колебаний.

Решение для свободного процесса можно найти двумя способами:

1-й способ. Ищем решение в виде:

$$u_{Cсв}(t) = B_1 e^{p_1 t} + B_2 e^{p_2 t} = B_1 e^{(-\delta + j\omega_c)t} + B_2 e^{(-\delta - j\omega_c)t}.$$

С учетом начальных условий находим B_1, B_2.

2-й способ. Ищем решение в виде:

$$u_{Cсв}\left(t\right) = B\,e^{-\delta t}\,sin\left(\omega_c t + \psi\right).$$

B; ψ – неизвестные постоянные интегрирования.

Составим систему из двух уравнений для расчета B и ψ.

При $t = 0_+$ $u_{Cсв}\left(0_+\right) = u_C\left(0_+\right) - u_{Cпр}\left(0_+\right) = B\,sin\psi = E$ (1)

Найдем производную:

$$\frac{du_{Cсв}\left(t\right)}{dt} = -\delta\,B\,e^{-\delta t}\,sin\left(\omega_c t + \psi\right) + \omega_c B\,e^{-\delta t}\,cos\left(\omega_c t + \psi\right) = \frac{i_{Cсв}\left(t\right)}{C}.$$

При $t = 0_+$ $i_C\left(0_+\right) = i_L\left(0_+\right) = 0,\, i_{Cпр} = 0.$

Следовательно: $i_{Cсв}\left(0_+\right) = 0$ и $-\delta\,B\,sin\psi + \omega_c B\,cos\psi = 0$ (2).

Из первого уравнения: $B = \dfrac{E}{sin\psi}$. Подставим в (2):

$$-\delta E + \omega_c E\, ctg\psi = 0,\ ctg\psi = \frac{\delta}{\omega_c},\ tg\psi = \frac{\omega_c}{\delta}.$$

Получим: $\psi = arctg\dfrac{\omega_c}{\delta}$.

Выполним преобразования:

$$sin\psi = sin\left[arctg\frac{\omega_c}{\delta}\right] = \frac{\dfrac{\omega_c}{\delta}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\omega_c}{\delta}\right)^2}} = \frac{\omega_c}{\sqrt{\delta^2+\omega_c^2}} = \frac{\omega_c}{\omega_0}.$$

Получим: $B=\dfrac{E}{sin\psi}=E\dfrac{\omega_0}{\omega_c}$, где:

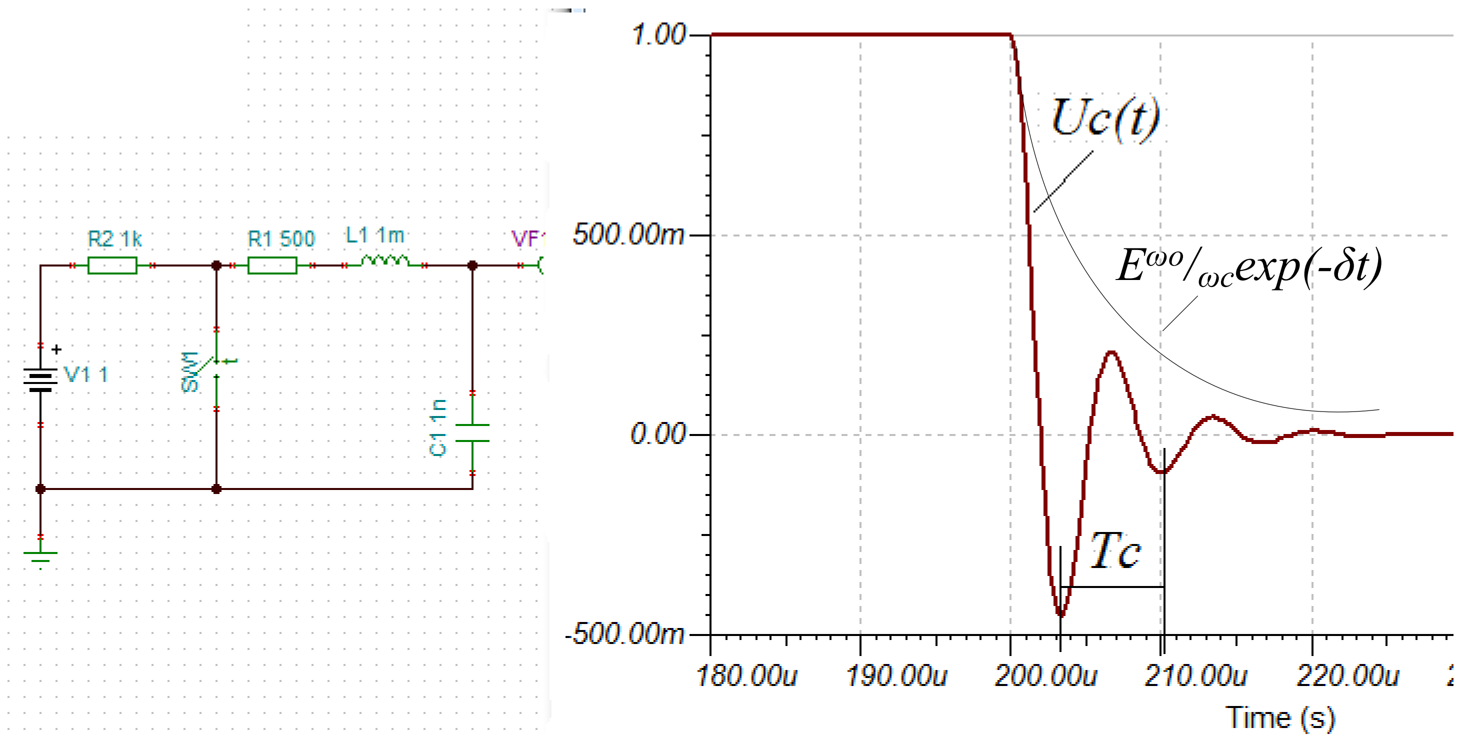
$\omega_0=\sqrt{\delta^2+\omega_c^2}$ - резонансная частота незатухающих колебаний;

$\omega_{св}=\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}$ - частота свободных колебаний.

Полный переходной процесс:

$$u_C\left(t\right)=E\frac{\omega_0}{\omega_c}e^{-\delta t}\,sin\left(\omega_c t+\psi\right),\text{ где: }\psi=arctg\frac{\omega_c}{\delta}.$$

RLC- oscill.TSC



Колебательный переходной процесс (R=500 Ом=0,5ρ)

Свободная составляющая имеет характер затухающих колебаний с частотой ω_c. Амплитуда свободных колебаний убывает по экспоненциальному закону $e^{-\delta t}$.

Декрементом колебаний называется отношение двух мгновенных значений напряжения или тока в моменты t и $t+T_C$.

$$\Delta = \frac{u_c(t)}{u_c(t+T_c)} = \frac{E\frac{\omega_0}{\omega_c}e^{-\delta t}\,sin(\omega_c t+\psi)}{E\frac{\omega_0}{\omega_c}e^{-\delta(t+T_c)}\,sin\left(\omega_c\left(t+\frac{2\pi}{\omega_c}\right)+\psi\right)} = e^{\delta T_c}.$$

$\delta T_C = ln\Delta = \theta$ - логарифм декремента колебаний;

$$\vartheta = ln\Delta = \delta T_C = \frac{R}{2L}\frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}}; \quad \delta = \frac{R}{L}.$$

$$\vartheta = \frac{R \cdot \pi}{\omega_0 L \cdot \sqrt{1 - \frac{R^2}{4L^2\omega_0^2}}}.$$

Добротность колебательного контура: $Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{\rho}{R}$.

Получим соотношения:

$$\vartheta = \frac{1}{Q}\frac{\pi}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{2Q}\right)^2}}; \quad \tau = \frac{1}{\delta} = \frac{2L}{R} = 2\frac{\omega_0}{\omega_0}\frac{L}{R} = 2\frac{Q}{\omega_0} = \frac{2}{\Pi},$$

где: П –полоса пропускания контура, τ - постоянная времени контура – время, в течение которого амплитуда затухает в e - раз.