# ОПЕРАТОРНЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ

В операторном методе для расчета переходных процессов используется преобразование Лапласа. При этом дифференциальные и интегральные операции над функциями времени (оригиналами) заменяют алгебраическими операциями над их интегральными преобразованиями (изображениями).

Этапы расчета операторным методом:

1. Находим независимые начальные условия $i_L(0),\ u_C(0)$.

2. Находим изображения источников сигнала и пассивных элементов и составляем операторную схему замещения цепи.

3. В операторной схеме замещения рассчитываем изображения токов и напряжений.

4. Переходим от изображений к оригиналам (функциям времени) токов и напряжений.

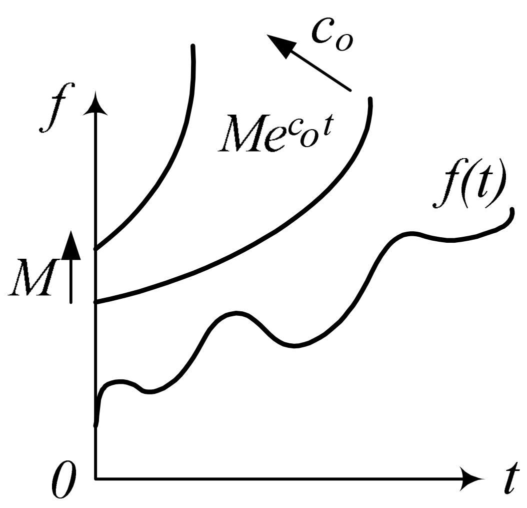
## Прямое преобразование Лапласа

Пусть $f(t)$ удовлетворяет условиям:

1. $f(t) = 0$ при $t < 0$;

2. При $t > 0$ $\quad \left|f(t)\right| < M\,e^{c_0 t}$, где $M > 0; c_0 > 0$ - любые действительные числа (могут быть очень большие).

Такую функцию $f(t)$ называю функцией ограниченного роста.




Все реальные функции токов и напряжений являются функциями ограниченного роста.

Если $f(t)$ удовлетворяет условиям (1) и (2), то интеграл $\int\limits_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt = F(p)$ сходится абсолютно и называется ***прямое преобразование Лапласа***. Здесь оператор Лапласа (комплексная переменная) $p = c + j\omega$, причем $Re\, p = c > c_0$.

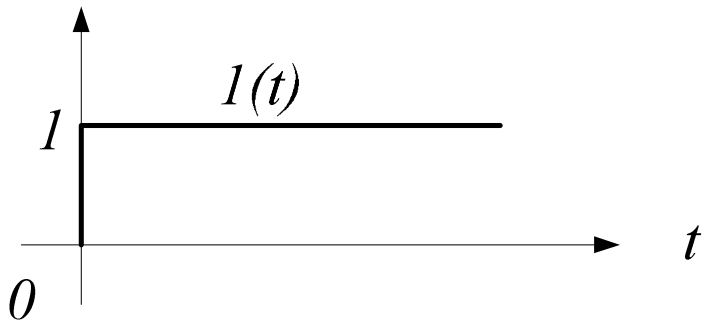
Прямое преобразование Лапласа будем обозначать соответствием:

$$f(t) \risingdotseq F(p)$$

Оригинал Изображение

## Изображение простейших функций

$1(t)$ - единичная функция (функция включения)




$$1(t) \doteqdot \frac{1}{p};$$

Экспонента $e^{-\alpha t} \doteqdot \dfrac{1}{p+\alpha}; \quad e^{-j\omega t} \doteqdot \dfrac{1}{p-j\omega}.$

## Основные свойства преобразования

1. Линейность: $f_1(t) + f_2(t) \doteqdot F_1(p) + F_2(p).$

2. Свойство коммутативности по отношению к операциям $Re$ и $Jm$:

Если $f(t) \mathrel{\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{=}}} F(p)$, причем $f(t) = Re\,f(t) + jJmf(t)$, то:

$Re\,f(t) \mathrel{\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{=}}} Re\,F(p)$ и $Jmf(t) \mathrel{\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{=}}} JmF(p)$.

Пример: $e^{-j\omega t} = cos\,\omega t + j\,sin\,\omega t \mathrel{\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{=}}} \dfrac{1}{p-j\omega} = \dfrac{p+j\omega}{p^2+\omega^2}$.

Тогда: $cos\,\omega t \mathrel{\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{=}}} \dfrac{p}{p^2+\omega^2}$, $sin\,\omega t \mathrel{\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{=}}} \dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$.

3. Изображение производной.

Если $f(t) \mathrel{\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{=}}} F(p)$, то $f'(t) \mathrel{\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{=}}} pF(p) - f(0)$.

Здесь: $f(0)=f(0_+)$ - значение $f(t)$ в момент $t=0_+$.

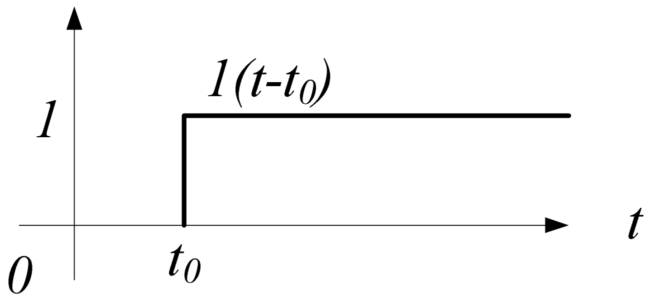
$p$- оператор дифференцирования

4. Изображение интеграла.

$$f(t)\doteqdot F(p).\ \text{Интеграл}\ \Psi(t)=\int_0^t f(t)dt \doteqdot \frac{F(p)}{p}.$$

$\dfrac{1}{p}$ - оператор интегрирования.

5. Теорема запаздывания.

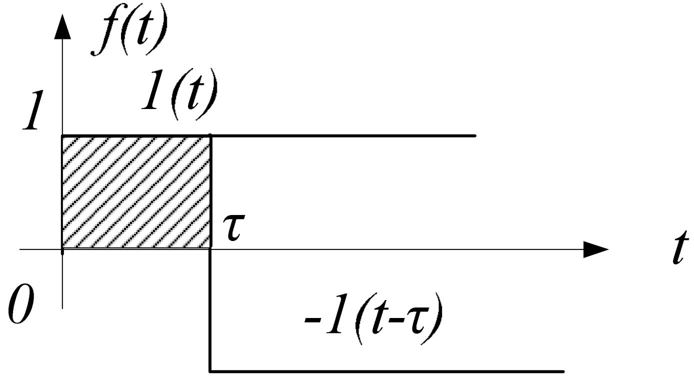



Исходная функция: $f(t)\doteqdot F(p)$,

$$f(t-t_0)\doteqdot e^{-pt_0}F(p)$$

Пример.

Найти изображение импульса.

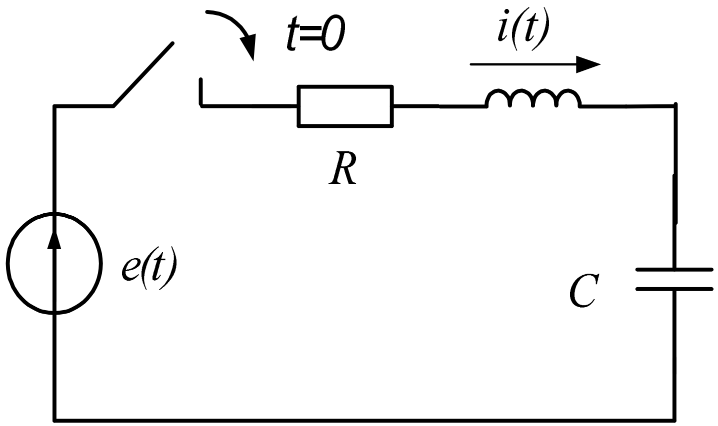



Импульс равен разности двух функций включения: $f(t) = 1(t) - 1(t-\tau)$.

Изображение импульса:

$$F_1(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p}e^{-p\tau} = \frac{1}{p}\left(1 - e^{-p\tau}\right)$$

## Расчет переходного процесса при нулевых начальных условиях




До коммутации ($t = 0\_$)

$i_L(0\_) = 0, u_C(0\_)$.

Найти ток $i(t)$.

После коммутации:

Дифференциальное уравнение: $e(t) = Ri(t) + L\dfrac{di}{dt} + \dfrac{1}{C}\int\limits_0^t idt$.

Преобразуем по Лапласу: $E(p) = RI(p) + pLI(p) + \dfrac{1}{pC}I(p)$.

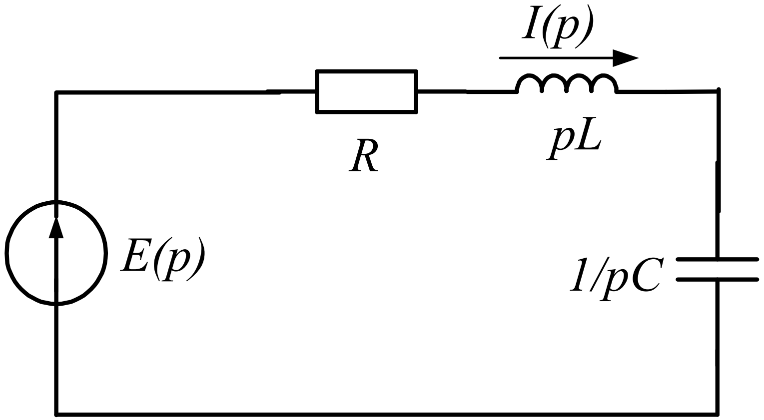
В операторном уравнении:

$R$ - активное сопротивление;

$pL$ - индуктивное сопротивление в операторной форме;

$\dfrac{1}{pC}$ - емкостное сопротивление в операторной форме.

## Операторная схема замещения при нулевых начальных условиях




$$I(p) = \frac{E(p)}{R + pL + \dfrac{1}{pC}} = \frac{E(p)}{Z(p)}$$

$Z(p) = R + pL + \dfrac{1}{pC}$ - операторное сопротивление цепи.

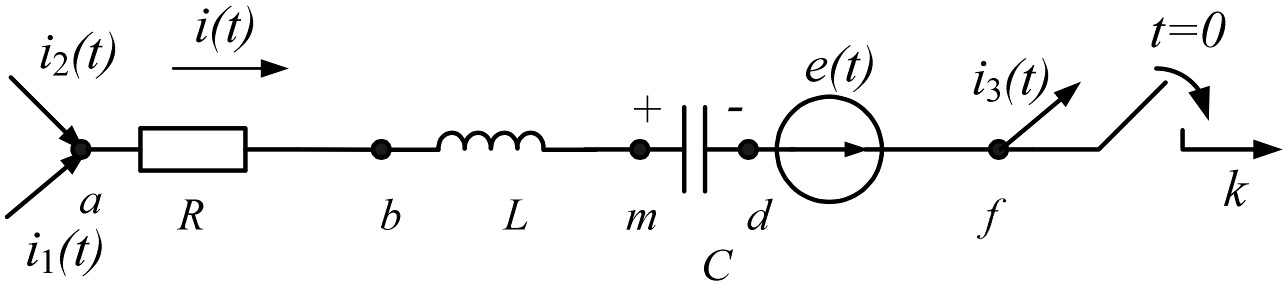
Правило: Операторное сопротивление $Z(p)$ можно получить из комплексного $Z(j\omega) = R + j\omega L + \dfrac{1}{j\omega C}$ заменой $j\omega \to p$.

Операторное сопротивление и операторная схема замещения имеют обобщенный характер и позволяют решать задачи при любом воздействии.

Операторная проводимость $Y(p) = \dfrac{1}{Z(p)}$.

Зная изображение тока, найдем оригинал: $I(p) \doteqdot i(t)$.

## Операторная схема замещения участка цепи при ненулевых начальных условиях




До коммутации при $t = 0_-$ имеем: $i_L(0_-) = i_L(0_+) = i_L(0)$, $u_C(0_-) = u_C(0_+) = U_C(0)$.

Для $t > 0$ (послекоммутационный режим) запишем уравнение:

$$u_{af} = -e(t) + iR + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t i(t)dt + U_C(0).$$

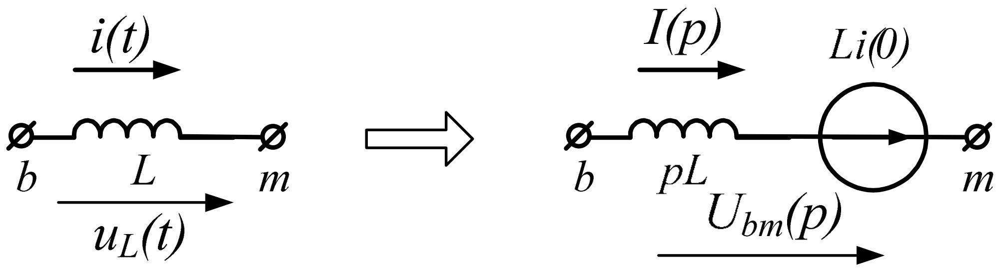
Преобразуем уравнение по Лапласу:

$$U_{af}(p) = -E(p) + RI(p) + pLI(p) - Li_L(0) + \frac{1}{pC} I(p) + \frac{U_C(0)}{p}.$$

Изображение тока: $I(p) = \dfrac{U_{af}(p) + E(p) + Li_L(0) - \dfrac{U_C(0)}{p}}{R + pL + \dfrac{1}{pC}}.$

Это закон Ома в операторной форме для участка цепи, содержащего ЭДС и начальные условия.

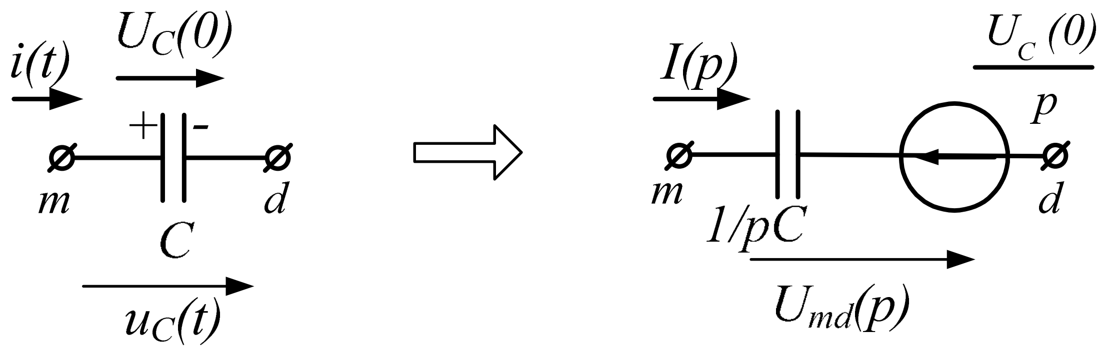
Здесь: $Li_L(0)$ – внутренний источник ЭДС, обусловленный начальным запасом магнитной энергии в индуктивности при $i_L(0) \neq 0$.




$$u_L(t) \doteqdot U_{bm}(p) = pLI(p) - Li_L(0).$$

Внутренний источник ЭДС $Li_L(0)$ направлен согласно току $I(p)$.

В операторном уравнении $\dfrac{U_C(0)}{p}$ - внутренний источник ЭДС, обусловленный начальным запасом электрической энергии в конденсаторе при $U_C(0) \neq 0$.

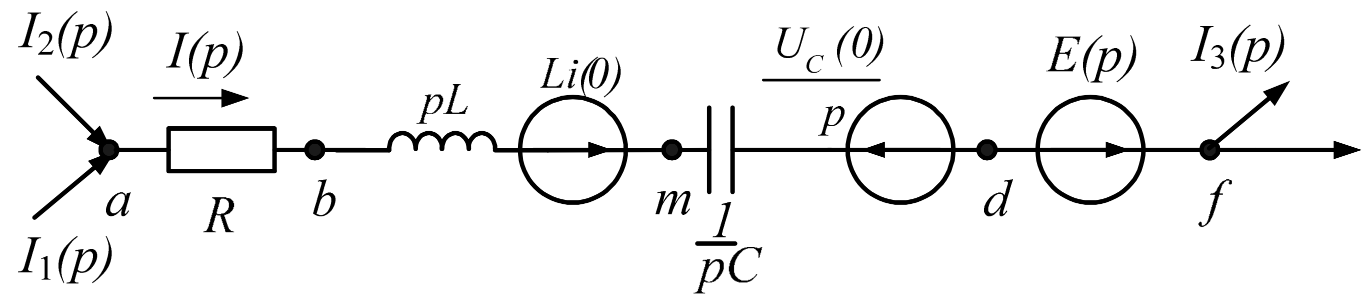



$$u_C(t) = u_{md}(t) \risingdotseq U_{md}(p) = \frac{1}{pC} I(p) + \frac{U_C(0)}{p}.$$

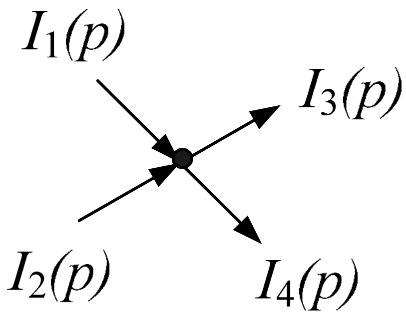
Внутренний источник ЭДС $\frac{U_C(0)}{p}$ направлен встречно току $I(p)$

.

В результате получаем операторную схему замещения участка цепи при ненулевых начальных условиях:



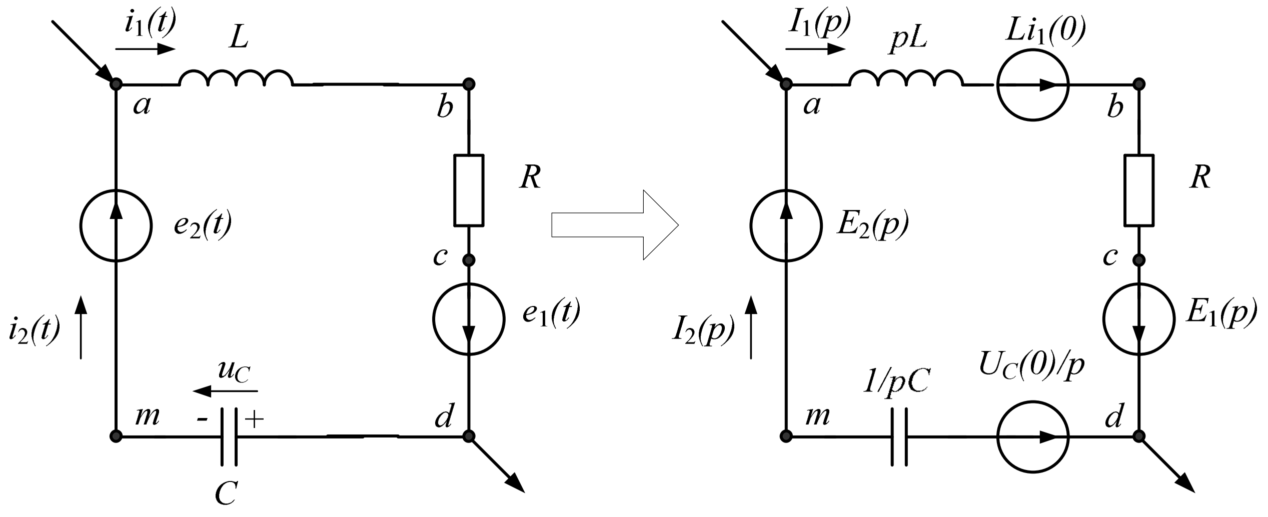

## Законы Кирхгофа в операторной форме




Первый закон Кирхгофа

$$I_1(p)+I_2(p)=I_3(p)+I_4(p)$$

## Второй закон Кирхгофа




При $t \geq 0$,
$i_1(0) \neq 0$,
$U_C(0) \neq 0$

Для мгновенных значений по второму закону Кирхгофа:

$$L\frac{di_1}{dt} + Ri_1(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i_2 dt + U_C(0) = e_1(t) + e_2(t).$$

В операторной форме:

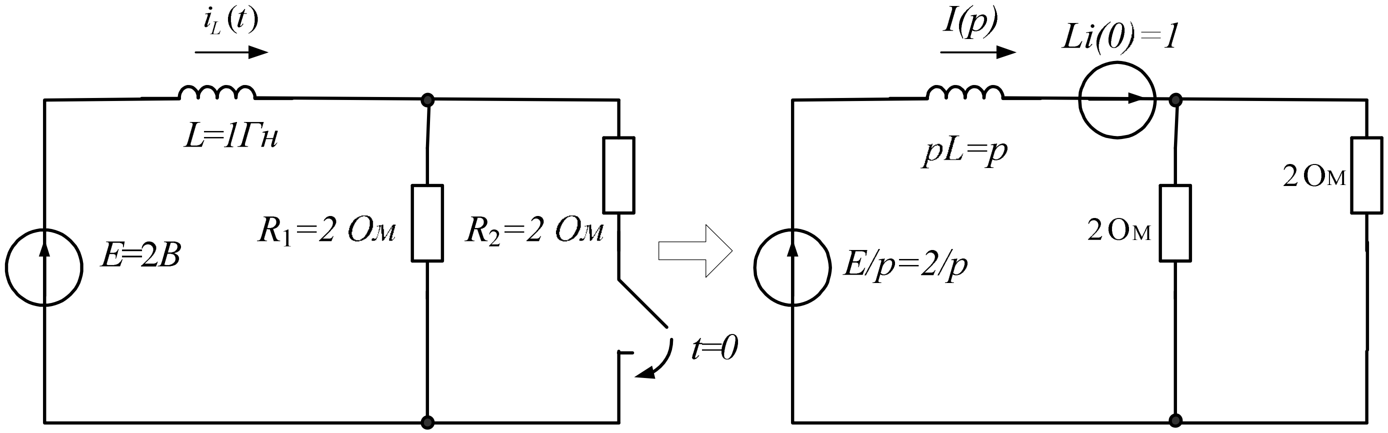
$$pL\,I_1(p)+RI_1(p)+\frac{1}{pC}I_2(p)=E_1(p)+E_2(p)+Li_1(0)-\frac{U_C(0)}{p}$$

Формулировка второго закона Кирхгофа в операторной форме:

В любом контуре операторной схемы замещения алгебраическая сумма произведений операторных токов на операторные сопротивления равна алгебраической сумме изображений реальных источников ЭДС и внутренних источников ЭДС.

Законы Ома и Кирхгофа в операторной схеме замещения выполняются. Следовательно, расчеты можно проводить любым методом расчета цепей постоянного и гармонического тока.

Пример:




1. Расчет режима до коммутации: $i_L(0) = 1A$.

2. Находим изображения источника сигнала, внутренние ЭДС и операторные сопротивления цепи:

$$e(t) = 2B \doteqdot E(p) = \frac{2}{p} B \cdot c,\ Li_L(0) = 1 ГнА = 1B \cdot c,\ pL = p \cdot 1\ Ом.$$

Составляем операторную схему замещения.

3. Находим изображение тока:

$$I(p)=\frac{E(p)+Li_L(0)}{pL+\dfrac{R_1R_2}{R_1+R_2}}=\frac{\dfrac{2}{p}+1}{p+1}=\frac{2+p}{p(p+1)}.$$

4. ***Переходим от изображения к оригиналу тока***.

Способы перехода:

а. Обратное преобразование Лапласа:

$$i(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} I(p)e^{pt}dp.$$

б. По таблицам преобразования Лапласа.

в. ***По теореме разложения при простых корнях:***

$$I(p)=\frac{2+p}{p(p+1)}=\frac{A(p)}{B(p)}.$$

Дробь $\frac{A(p)}{B(p)}$ должна быть правильной – степень числителя меньше степени знаменателя.

1. Находим корни знаменателя: $B(p)=0, p(p+1)=0,$

корни: $p_1=0, p_2=-1\,\frac{1}{c}$.

2. Находим производную знаменателя: $B'(p)=2p+1.$

3. Находим:

$$A(p_1)=2,\ A(p_2)=1,\ B'(p_1)=1,\ B'(p_2)=-1.$$

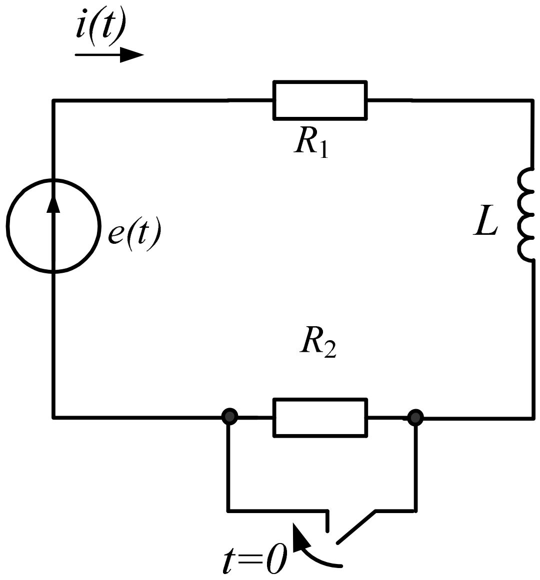
4. Находим оригинал тока по формуле разложения:

$$i(t)=\frac{A(p_1)}{B'(p_1)}e^{p_1t}+\frac{A(p_2)}{B'(p_2)}e^{p_2t}=2e^{0t}-1e^{-t}=2-e^{-t}.$$

*Примечание*.

Если один из корней равен нулю, оригинал содержит постоянную составляющую.

## Особенности расчета при гармонической ЭДС




$$e(t)=E_m\sin\omega t.$$

Найти ток $i(t)$.

1. Расчет режима до коммутации: $\underline{I}_m = \dfrac{\underline{E}_m}{R_1 + R_2 + j\omega L} = I_m e^{-j\varphi}$.

Мгновенное значение: $i_L\left(t\right) = I_m\ sin\left(\omega t - \varphi\right)$.

При $t = 0_+$ начальное условие: $i_L\left(0_+\right) = I_m\, sin\left(-\varphi\right)$.

Способы решения:

а) Расчет для действительной формы ЭДС:

$$e(t) = E_m\, sin\, \omega t \doteq E_m \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}.$$

Находимизображение тока: $I\left(p\right) = \dfrac{E_m \dfrac{\omega}{p^2 + \omega^2} + Li_L\left(0\right)}{R_1 + pL}$.

Сложные вычисления!

б) Расчет для комплексной формы ЭДС:

Заменим $e(t)$ на $\tilde{E}(t) = E_m e^{j\omega t} \doteqdot \dfrac{E_m}{p - j\omega}$.

Комплексная функция времени для тока:

$$\tilde{i}(t) \doteqdot \frac{\dfrac{E_m}{p - j\omega} + jLi_L(0)}{R_1 + pL}$$

(для $e(t) = E_m \sin\omega t$ внутренний источник ЭДС надо взять мнимым.

Находим $i(t) = Jm\,\tilde{i}(t)$.

в) Применим *метод отделения принужденного режима от свободного*.

2. Расчет принужденного режима символическим методом:

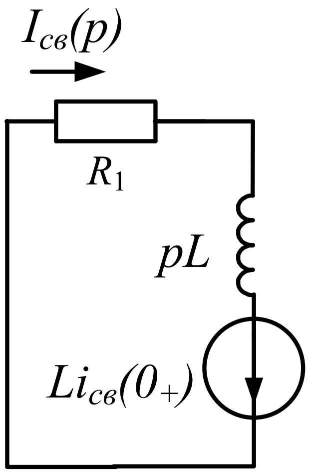
$$\underline{I}_{m\,пр} = \frac{E_m}{R_1 + j\omega L} = I_{m\,пр}\, e^{j\varphi_2},\ \ i_{L\,пр}(t) = I_{m\,пр} \sin(\omega t + \varphi_2),$$

$$i_{L\,пр}(0_+) = I_{m\,пр} \sin\varphi_2.$$

3. Определяем начальные условия для свободных составляющих.

$$i_{Lсв}(0_+) = i_L(0_+) - i_{L\,пр}(0_+).$$

4. Составляем операторную схему замещения для свободных составляющих.




Находим свободный ток:

$$I_{св}(p) = \frac{Li_{Lсв}(0)}{R_1 + pL} \doteqdot i_{Lсв}(0_+)\, e^{-\frac{R_1}{L}t}.$$

5. Находим полный ток:

$$i_L(t) = i_{L\,пр}(t) + i_{L\,св}(t) = I_{m\,пр}\,sin(\omega t + \varphi_2) + i_{L св}(0_+)e^{-\frac{R_1}{L}t}.$$