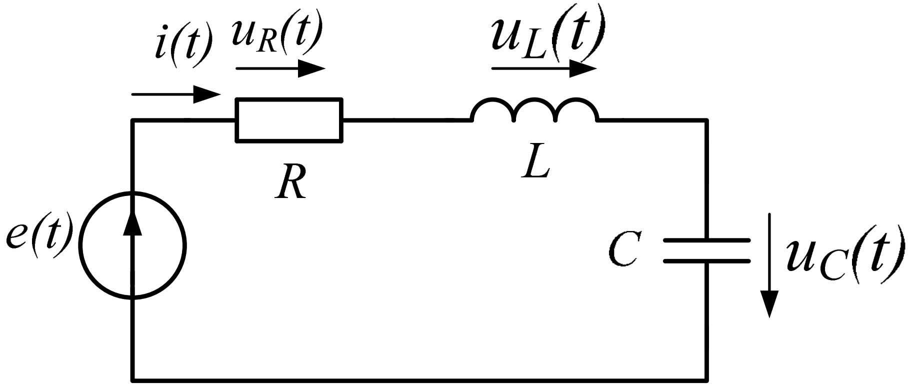
ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ПРИ ГАРМОНИЧЕСКИХ ТОКАХ И НАПРЯЖЕНИЯХ



По 2ЗК:

$$u_R + u_L + u_C = e(t)$$

$$iR + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i dt = e(t)$$

Линейное интегро-дифференциальное уравнение электрической цепи справедливо для любой формы сигналов. Для гармонического сигнала применяют упрощённый метод расчёта, не требующий решения интегро-дифференциального уравнения. Он называется символический метод расчёта цепей гармонического тока.

Гармонический сигнал

$$i(t) = I_m sin(\omega t + \psi_I), u(t) = U_m sin(\omega t + \Psi_U)$$

В цепи гармонического тока во всех ветвях угловая частота ω известна. Неизвестны и подлежат определению I_m, Ψ_I и U_m, Ψ_U.

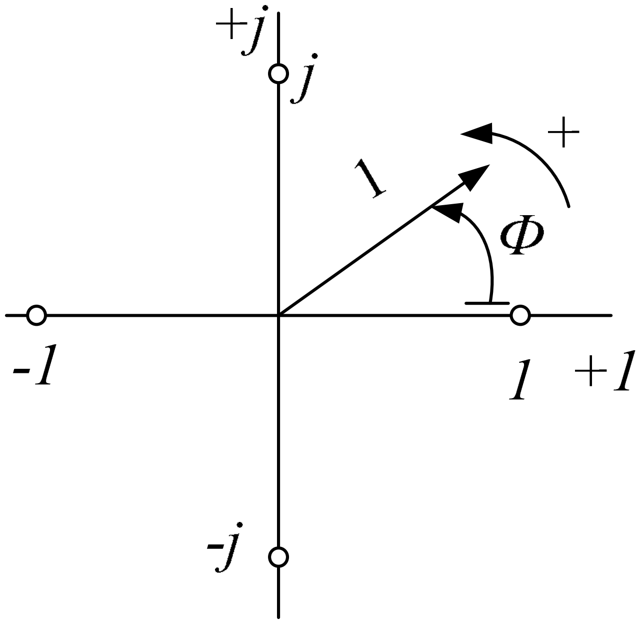
Каждый ток и напряжение можно охарактеризовать амплитудой и фазой и все расчёты вести только для амплитуд и фаз гармонической функции.

Амплитуда и фаза – это символы, характеризующие гармоническую функцию. Подставив их в общее выражение с известной частотой, всегда можно найти мгновенное значение функции.

Пример. Рассчитаны: $I_m = 2A, \Psi = 45^0$. Известна $\omega = 10^3 \frac{1}{c}$.

Находим: $i(t) = 2 sin(10^3 t + 45^0)$.

Оператор поворота



$$e^{j\Phi} = cos\,\Phi + j\,sin\,\Phi$$

$$\left|e^{j\Phi}\right| = \sqrt{cos^2\,\Phi + sin^2\,\Phi} = 1$$

$$\Phi = 0 \qquad e^{j0^0} = cos\,0 + j\,sin\,0 = 1$$

$$\Phi = \frac{\pi}{2} \qquad e^{j90^0} = j$$

$$\Phi = \pi \qquad e^{j180^0} = \text{-}1$$

$$\Phi = -\frac{\pi}{2} \quad e^{-j90^0} = -j$$

$$arg\,e^{j\Phi} = arctg\left[\frac{sin\,\Phi}{cos\,\Phi}\right] = \Phi$$

Символическое представление гармонической функции.

$i(t) = I_m sin(\omega t + \psi_I)$ -гармоническая функция времени;

I_m - амплитуда; ω - угловая частота; ψ_I - начальная фаза;

$\Phi(t) = \omega t + \psi_I$ - текущая фаза.

Вращающийся вектор оператора поворота:

$$e^{j\Phi(t)} = cos\,\Phi(t) + j\,sin\,\Phi(t)$$

Введем комплексную функцию времени:

$$\tilde{i}(t) = I_m e^{j\Phi(t)} = I_m cos\,\Phi(t) + j\,I_m sin\,\Phi(t).$$

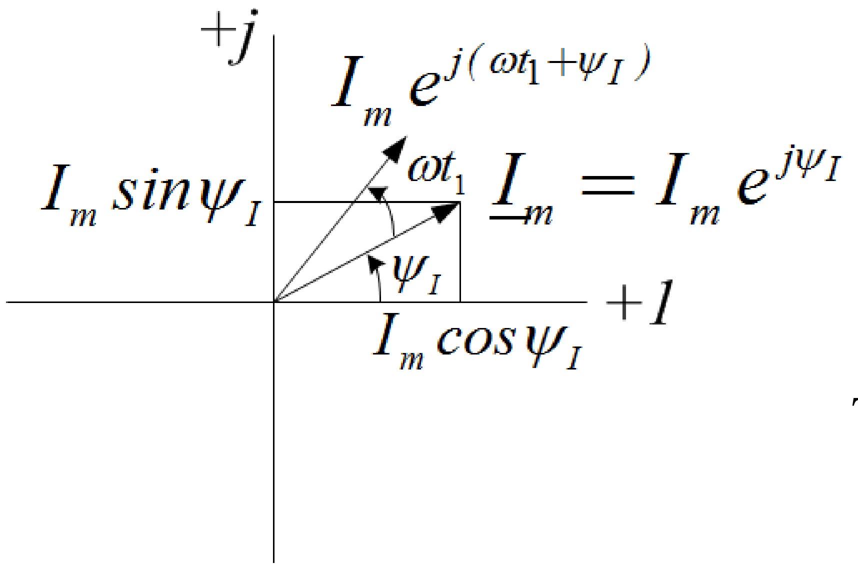
$$\tilde{i}(t) = I_m e^{j\Phi(t)} = I_m e^{j\psi_I} e^{j\omega t}.$$

Здесь: $\underline{I}_m = I_m e^{j\psi_I}$ - комплексная амплитуда гармонической функции, не зависит от времени и является «символом» гармонической функции;

$\left| I_m e^{j\psi_I} \right| = I_m$ - модуль комплексной амплитуды, амплитуда гарmonической функции;

ψ_I - фаза комплексной амплитуды, равна начальной фазе гармонической функции;

$e^{j\omega t}$ - оператор поворота.



В момент t=0

$$I_m e^{j\psi_I} = I_m \cos\psi_I + j I_m \sin\psi_I.$$

В момент $t=t_1$ получим $I_m e^{j\psi_I} e^{j\omega t_1}$

1. Гармоническая функция представляется вектором, вращающимся с частотой ω, длина вектора I_m, начальная фаза ψ_I, текущая фаза $\Phi(t) = \omega t + \psi_I$.

2. Проекция вектора на ось $+j$ даёт гармоническую синусную функцию.

3. Векторы гармонической функции одной частоты вращаются с

одинаковыми угловыми скоростями и их положение относительно друг друга неизменно и соответствует моменту t=0. Поэтому расчёт комплексных амплитуд тока и напряжения полностью определяет режим цепи в любой момент времени.

Формы записи комплексной амплитуды (КА).

$\underline{A}_m = A_m e^{j\Psi}$ – показательная форма;

$\underline{A}_m = A_m \cos\Psi + jA_m \sin\Psi$ – тригонометрическая форма;

$\underline{A}_m = a + jb$ – алгебраическая форма;

Переход от алгебраической формы к показательной

$$\underline{A}_m = a + jb; A_m = \left|a + jb\right| = \sqrt{a^2 + b^2}; \Psi = arctg\frac{b}{a} \pm (\frac{0}{\pi}).$$

$$\underline{A}_m = \sqrt{a^2 + b^2} e^{j\Psi}$$

Пример.

$$\underline{A}_m = 1 + j1 \qquad \Psi = 45^0$$

$$\underline{A}_m = -1 - j1$$

$$\left| Am \right| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\Psi = arctg(\frac{-1}{-1}) = 45^0 + 180^0 = 225^0$$

Основные формулы

$$(a + jb)(a - jb) = a^2 + b^2$$

$$\frac{1}{a + jb} = \frac{a - jb}{(a + jb)(a - jb)} = \frac{a - jb}{a^2 + b^2}$$

Пример

$i(t) = 20 sin(\omega t - 45^o)$. Найти комплексную амплитуду.

$$\tilde{i}(t) = 20e^{j(\omega t - 45^o)} = 20e^{-j45^o}e^{j\omega t};\ \underline{I}_m = 20e^{-j45^o}$$

Важное требование

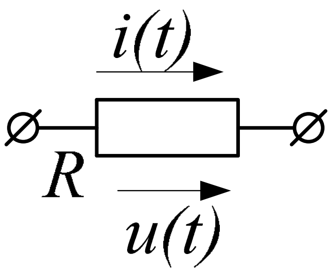
Для правильного учёта фаз все исходные гармонические функции следует преобразовывать к одному виду, а именно к синусу:

$$cos(\omega t + \Psi) = sin(\omega t + \Psi + 90^0)$$

Символический метод расчёта

Это расчёт цепей гармонического тока с использованием комплексных амплитуд и комплексных сопротивлений.

Ток и напряжение на резисторе



$$i(t) = I_m\, sin(\omega t + \Psi_I).$$ Найти u(t).

Возьмем комплексную функцию времени для тока

$$\tilde{i}(t) = I_m e^{j\psi_I} e^{j\omega t}.$$

Для напряжения $\tilde{u}_R(t) = R\,I_m\,e^{j\psi_I}\,e^{j\omega t} = U_{mR}e^{j\psi_U}\,e^{j\omega t}$.

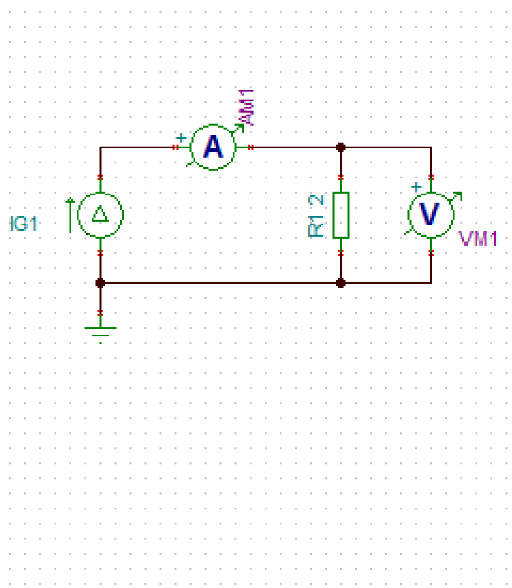
Получим: $U_{mR}e^{j\psi_U} = R\,I_m\,e^{j\psi_I}$.

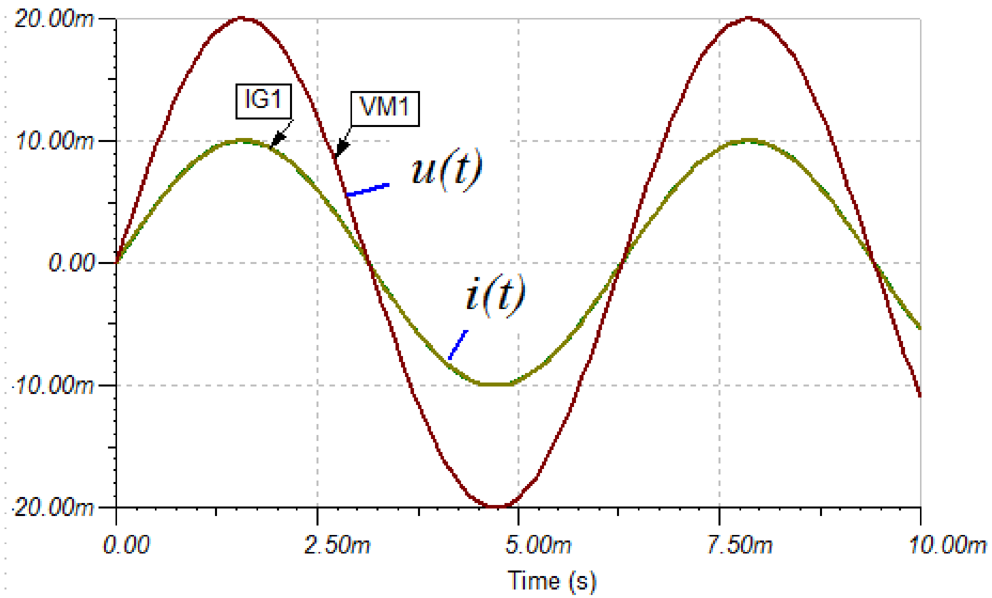
Для комплексных амплитуд: $\underline{U}_{mR} = R\,\underline{I}_m$.

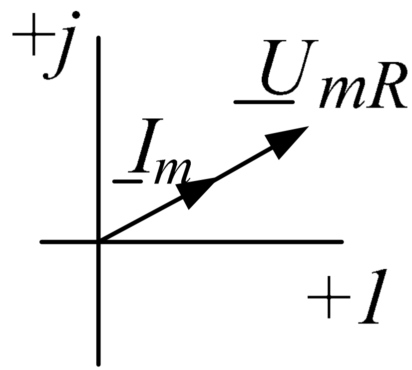
Для модулей (амплитуд): $U_{mR} = R\,I_m$. Для фаз: $\psi_U = \psi_I$.

Напряжение на резисторе совпадает по фазе с током.

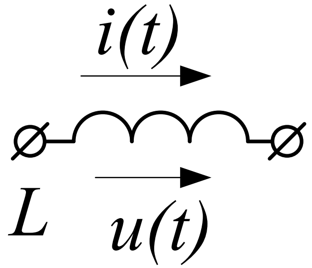
AC-R.TSC







Ток и напряжение в индуктивности



$$u_L(t) = L\frac{di}{dt}.$$

Пусть $\tilde{i}(t) = I_m e^{j\psi_I} e^{j\omega t}$

$$\tilde{U}_L(t) = L\frac{d\tilde{i}(t)}{dt} = L\frac{d(I_m e^{j\Psi_I} e^{j\omega t})}{dt} = j\omega L I_m e^{j\Psi_I} e^{j\omega t} = \underline{U}_m e^{j\omega t}$$

Для комплексных амплитуд: $\underline{U}_{mL} = j\omega L \underline{I}_m = \underline{Z}_L \underline{I}_m$.

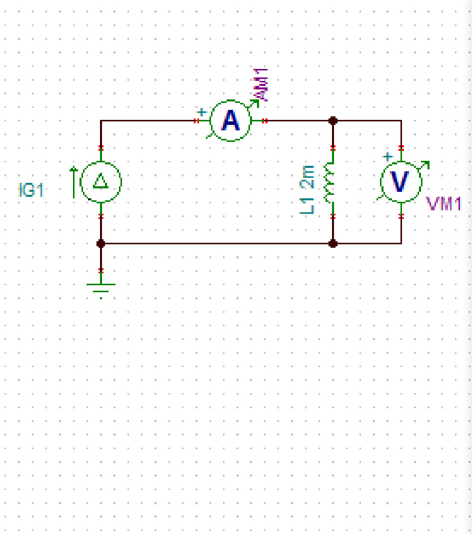
$\underline{Z}_L = j\omega L = jX_L$ - комплексное сопротивление индуктивности;

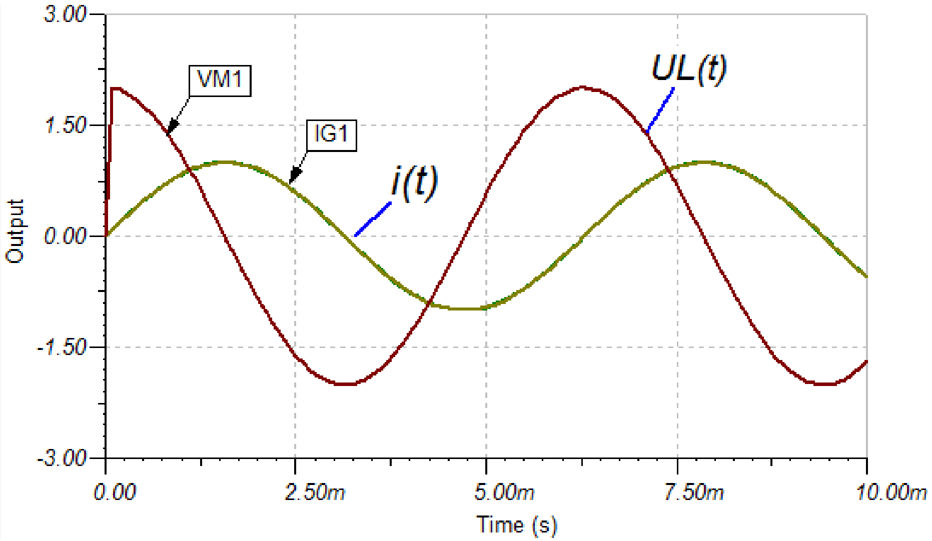
$U_{mL} = \omega L I_m$ - амплитуда;

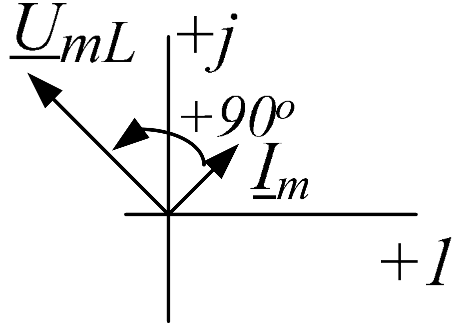
$$je^{j\Psi_I} = e^{j90^0} e^{j\Psi_I} = e^{j(\Psi_I + 90^0)} = e^{j\Psi_U};\ \Psi_U = \Psi_I + 90^0.$$

Мгновенное значение: $u_L(t) = \omega L I_m sin(\omega t + \Psi_I + 90^o)$.

AC-L.TSC

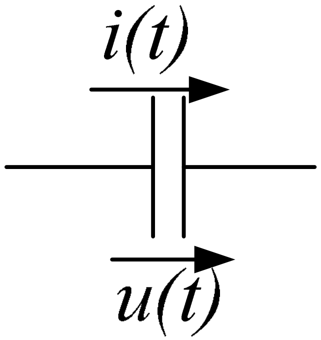






Напряжение на индуктивности опережает ток на 90°.

Ток и напряжение в емкости



$$i_C(t) = C\frac{du_C}{dt}$$

Пусть $u_c(t) = U_{mC}\, sin(\omega t + \Psi_U)$.

$$\tilde{u}_c(t) = U_{mC} e^{j\Psi_U} e^{j\omega t};$$

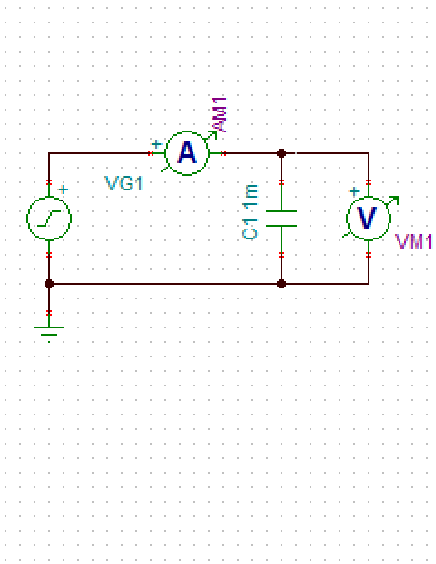
$$\tilde{i}(t) = C\frac{d}{dt}\left[U_{mC} e^{j\Psi_U} e^{j\omega t}\right] = j\omega C U_{mC} e^{j\Psi_U} e^{j\omega t} = I_m e^{j\Psi_I} e^{j\omega t}.$$

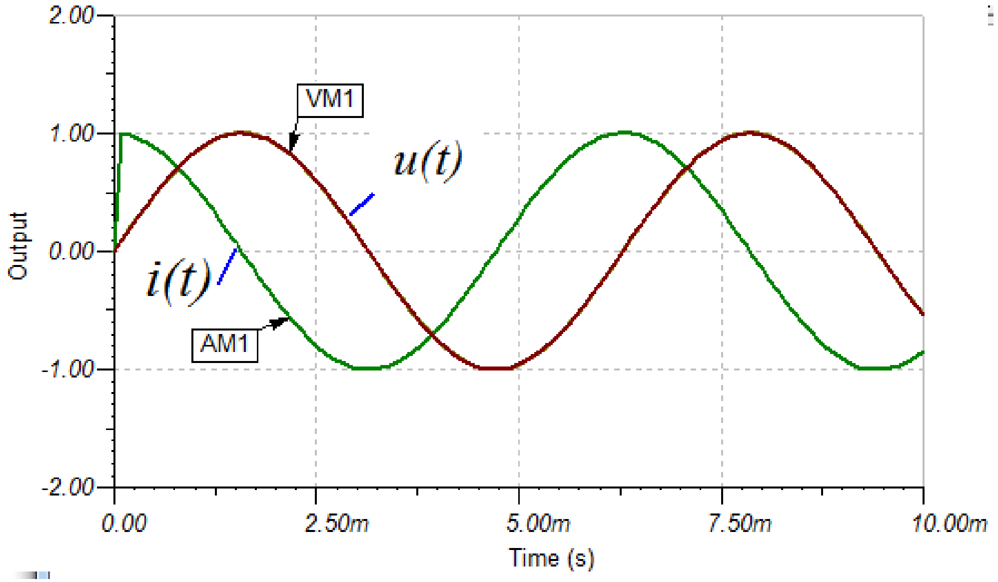
$$\underline{U}_{mC} = \frac{1}{j\omega C}\underline{I}_m = -j\frac{1}{\omega C}\underline{I}_m = \underline{Z}_C\, \underline{I}_m.$$

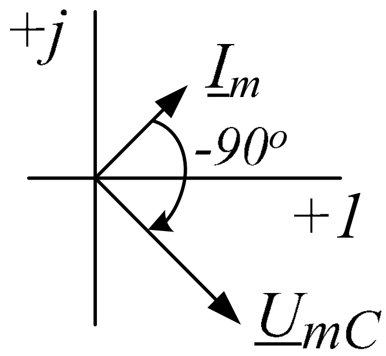
$\underline{Z}_c = -j\dfrac{1}{\omega C} = -jX_C$ - комплексное сопротивление емкости.

Для амплитуд: $U_{mC} = \dfrac{1}{\omega c} I_m$. Для фаз: $\Psi_U = \Psi_I - 90^o$.

AC-C.TSC

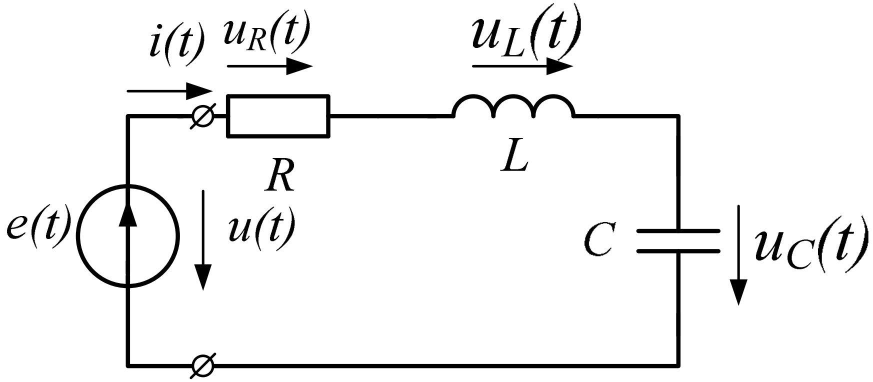






Напряжение на емкости отстает по фазе от тока на 90^o.

Комплексное сопротивление цепи (КС)



$$u_R + u_L + u_C = e(t) = u(t)$$

$$iR + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} idt = u(t)$$

В символической форме:

$$\underline{U}_{mR} + \underline{U}_{mL} + \underline{U}_{mC} = \underline{U}_m$$

$$R\underline{I}_m + j\omega L\underline{I}_m - j\frac{1}{\omega c}\underline{I}_m = \underline{I}_m\underline{Z}$$

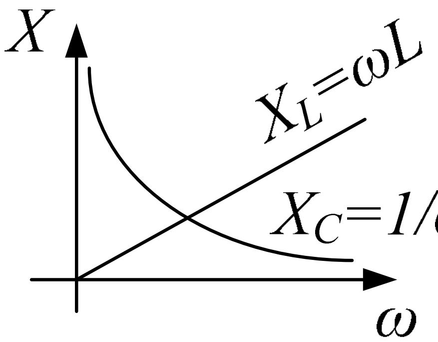
Комплексное сопротивление цепи:

$$\underline{Z} = R + j\omega L - j\frac{1}{\omega C} = R + jX_L - jX_C = R + jX;$$

R - активное сопротивление;

$X_L = \omega L$ - реактивное сопротивление индуктивности (> 0)

$X_C = \dfrac{1}{\omega c}$ - реактивное сопротивление ёмкости (> 0)



$$X = X_L - X_C = \omega L - \frac{1}{\omega c} \ ({}^{>}\!/_{<} 0)$$

- реактивное сопротивление цепи

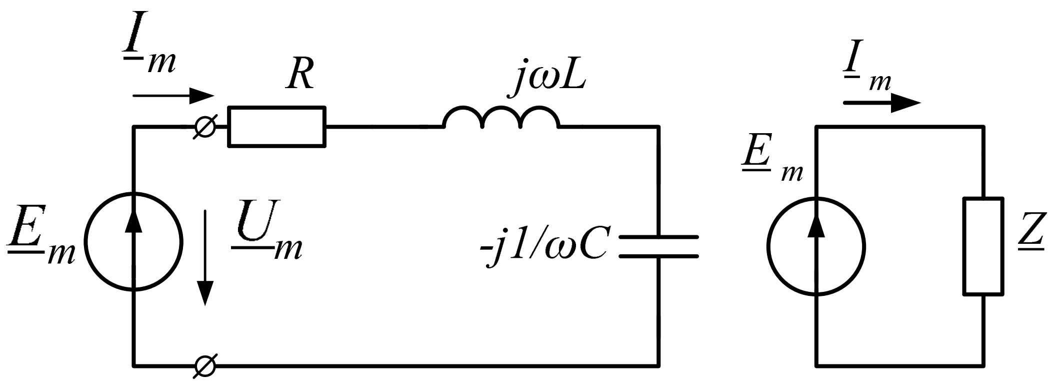
$\underline{Z} = Ze^{j\varphi}$ – комплексное сопротивление цепи;

$Z = \sqrt{R^2 + X^2}$ - полное сопротивление цепи (модуль КС);

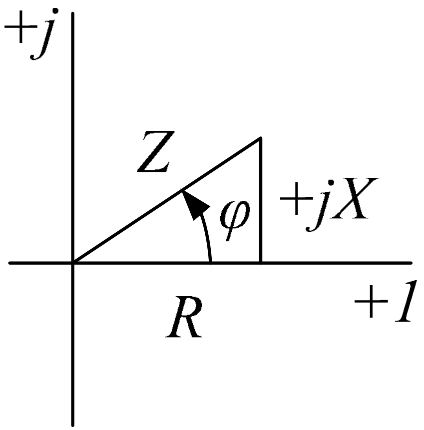
$\varphi = arctg\dfrac{X}{R}$ - аргумент комплексного сопротивления;

$\underline{Z} = Z\cos\varphi + jZ\sin\varphi$

Символическая схема замещения цепи



$$\underline{I}_m = \frac{\underline{E}_m}{\underline{Z}}.$$

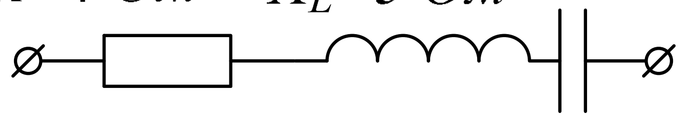


Треугольник сопротивлений

$$\underline{Z} = \sqrt{R^2 + X^2}e^{j\varphi},\ \varphi = arctg\frac{X}{R},$$

$$(-90^o < \varphi < 90^o)$$

Пример. Найти полное сопротивление.



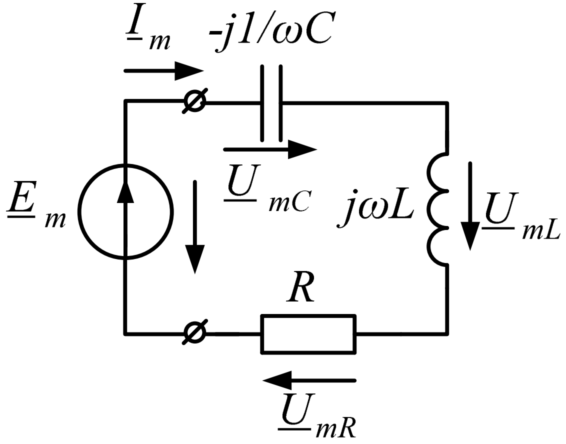
$$\underline{Z} = R + j(X_L - X_C) = 4 + j(5-2) = 4 + j3$$

;

$$|\underline{Z}| = \sqrt{16+9} = 5,\ \varphi = arctg\frac{X}{R} = arctg\frac{3}{4} = 37^0, \underline{Z} = 5e^{j37^0}.$$

Векторная диаграмма тока и напряжения в неразветвлённой цепи

Векторной диаграммой называется совокупность векторов напряжения и токов, построенных из начала комплексной плоскости с соблюдением взаимной ориентации.



Задана $e(t) = E_m \sin(\omega t + \Psi_E)$.

Переходим к комплексной амплитуде

$$\underline{E}_m = E_m e^{j\Psi_E}.$$

$$\underline{Z} = R + jX = R + j(X_L - X_c)$$

$$X_L = \omega L, X_c = \frac{1}{\omega c}.$$

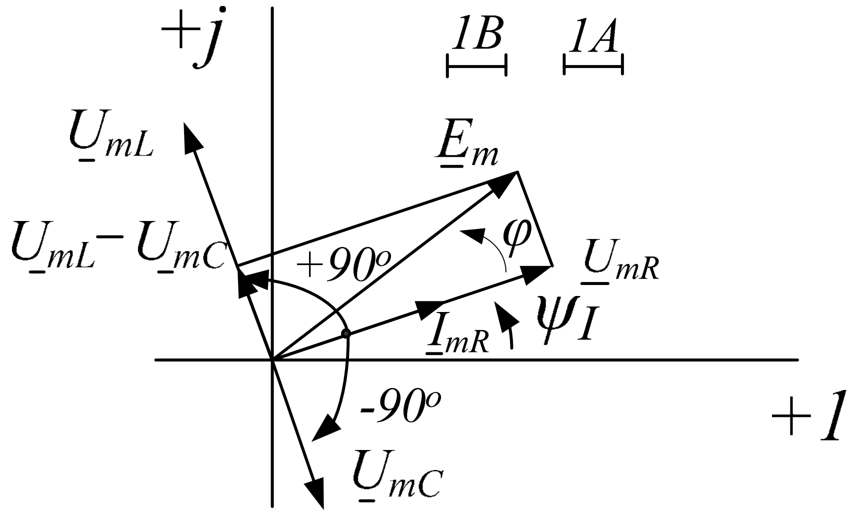
$$\underline{Z} = R + jX = Ze^{j\varphi}, Z = \sqrt{R^2 + X^2}, \varphi = arctg\frac{X}{R}.$$

$$\underline{I}_m = \frac{\underline{E}_m}{\underline{Z}} = \frac{E_m e^{j\Psi_E}}{Ze^{j\varphi}} = \frac{U_m}{Z} e^{j(\Psi_E - \varphi)} = I_m e^{j\Psi_I};$$

$$\Psi_I = \Psi_E - \varphi;$$

$$\underline{U}_{mR} = \underline{I}_m R = I_m R e^{j\Psi_I}.$$

$$\underline{U}_{mL} = jX_L \underline{I}_m = \omega L I_m e^{j(\Psi_I + 90^0)}, \ \underline{U}_{mC} = -j\frac{1}{\omega c}\underline{I}_m = \frac{1}{\omega c} I_m e^{-j(\Psi_I - 90^0)}.$$



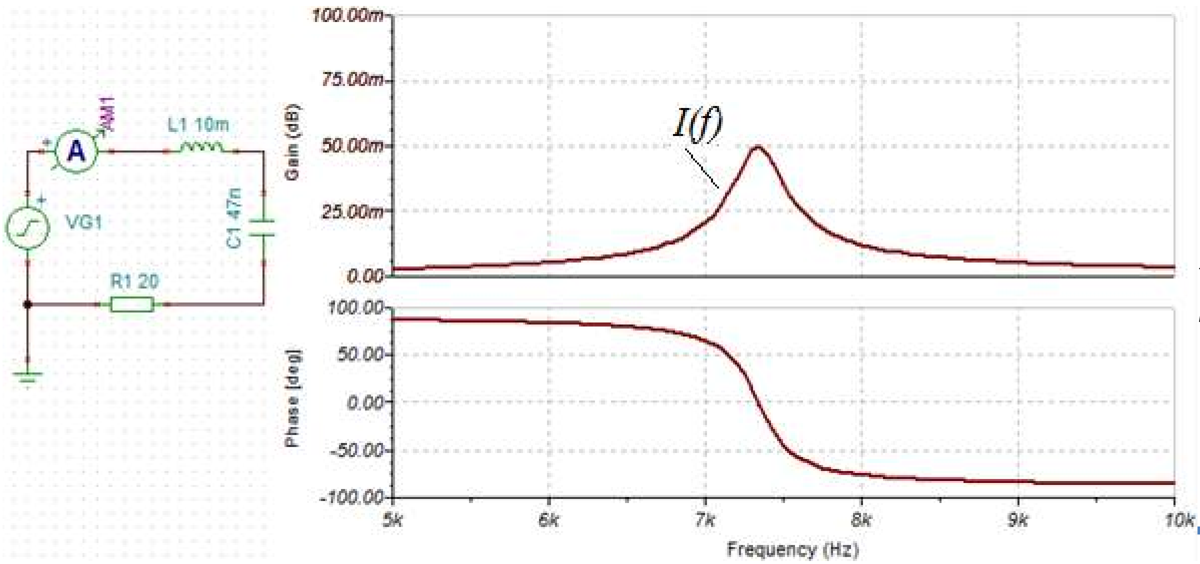
Резонансом напряжений (последовательным резонансом) называется режим работы пассивной цепи, при котором ток на входе цепи по фазе совпадает с напряжением и сопротивление становится чисто активным.

$$\underline{Z} = R + jX = R + j(X_L - X_c).$$

Если $X_э = X_L - X_C = 0$, то $\varphi = 0$

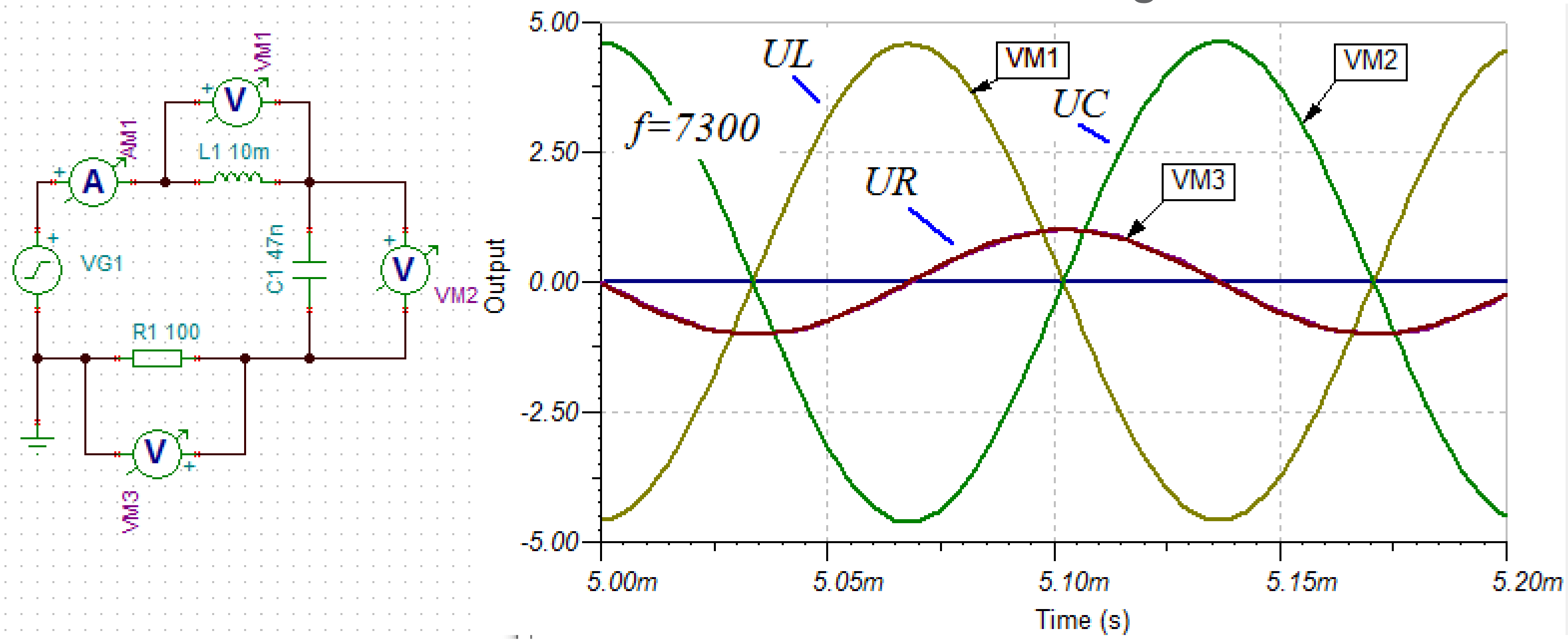
$$X_э = \omega_o L - \frac{1}{\omega_o C} = 0. \text{ Резонансная частота } \omega_о = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

AC-Resonans.TSC



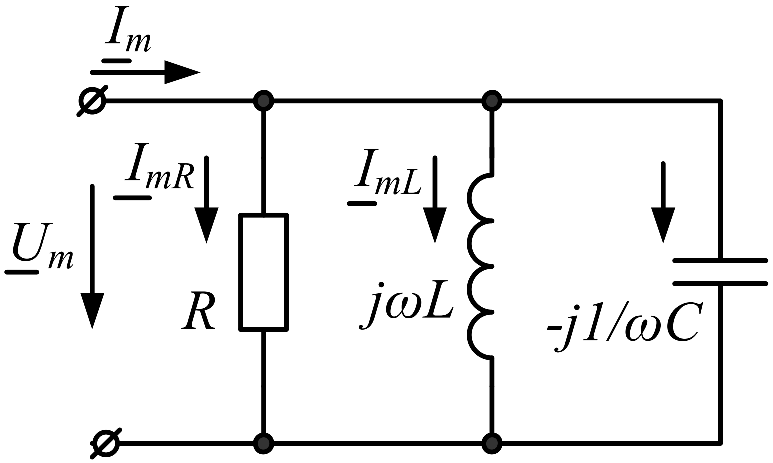
АЧХ и ФЧХ последовательного контура.

AC-Resonans-ULC.TSC



Напряжения на контуре при резонансе

Расчёт напряжения и токов при параллельном соединении R,L,C. Комплексная проводимость цепи



$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \Psi_U)$$

$$\underline{U}_m = U_m e^{j\Psi_U}$$

$$\underline{I}_{mR} = \frac{\underline{U}_m}{R},\ \underline{I}_{mL} = \frac{\underline{U}_m}{j\omega L},\ \underline{I}_{mC} = \frac{\underline{U}_m}{-j\dfrac{1}{\omega c}}$$

По 1ЗК: $\underline{I}_m = \underline{I}_{mR} + \underline{I}_{mL} + \underline{I}_{mC}$

$$\underline{I}_m = \frac{\underline{U}_m}{\underline{Z}_{вх}} = \frac{\underline{U}_m}{R} + \frac{\underline{U}_m}{j\omega L} + \frac{\underline{U}_m}{-j\dfrac{1}{\omega C}};$$

$$\frac{1}{\underline{Z}_{вх}} = \underline{Y} = \frac{1}{R} - j\frac{1}{\omega L} + j\omega C = \frac{1}{R} - j\left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right) = g - jb.$$

$\underline{\mathrm{Y}}$ - комплексная проводимость цепи;

g - активная проводимость цепи (>0);

$b=\frac{1}{\omega L}-\omega C$ - реактивная проводимость ($<>0, =0$);

$b=b_L-b_C,\ b_L=\frac{1}{\omega L}$ - реактивная проводимость индуктивности (>0);

$b_C=\omega C$ - реактивная проводимость ёмкости;

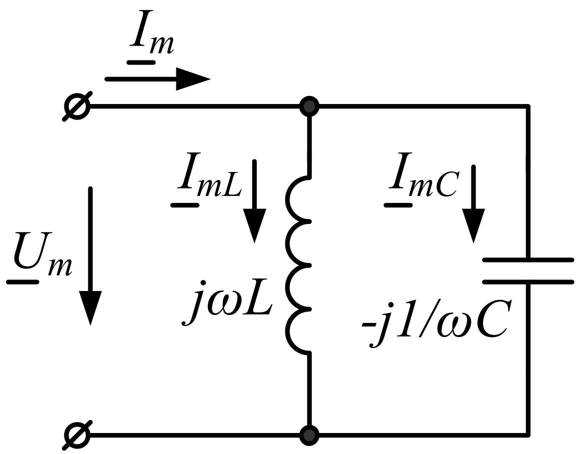
$\underline{Y}=ye^{-j\varphi}$

$\mathrm{y}=\sqrt{\mathrm{g}^2+\mathrm{b}^2}$ -полная проводимость

$\varphi=\mathrm{arctg}\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{g}}$ - аргумент комплексной проводимости

При параллельном соединении суммируются комплексные проводимости ветвей: $\underline{Y}_{вх}=\underline{Y}_1+\underline{Y}_2+\underline{Y}_3$.

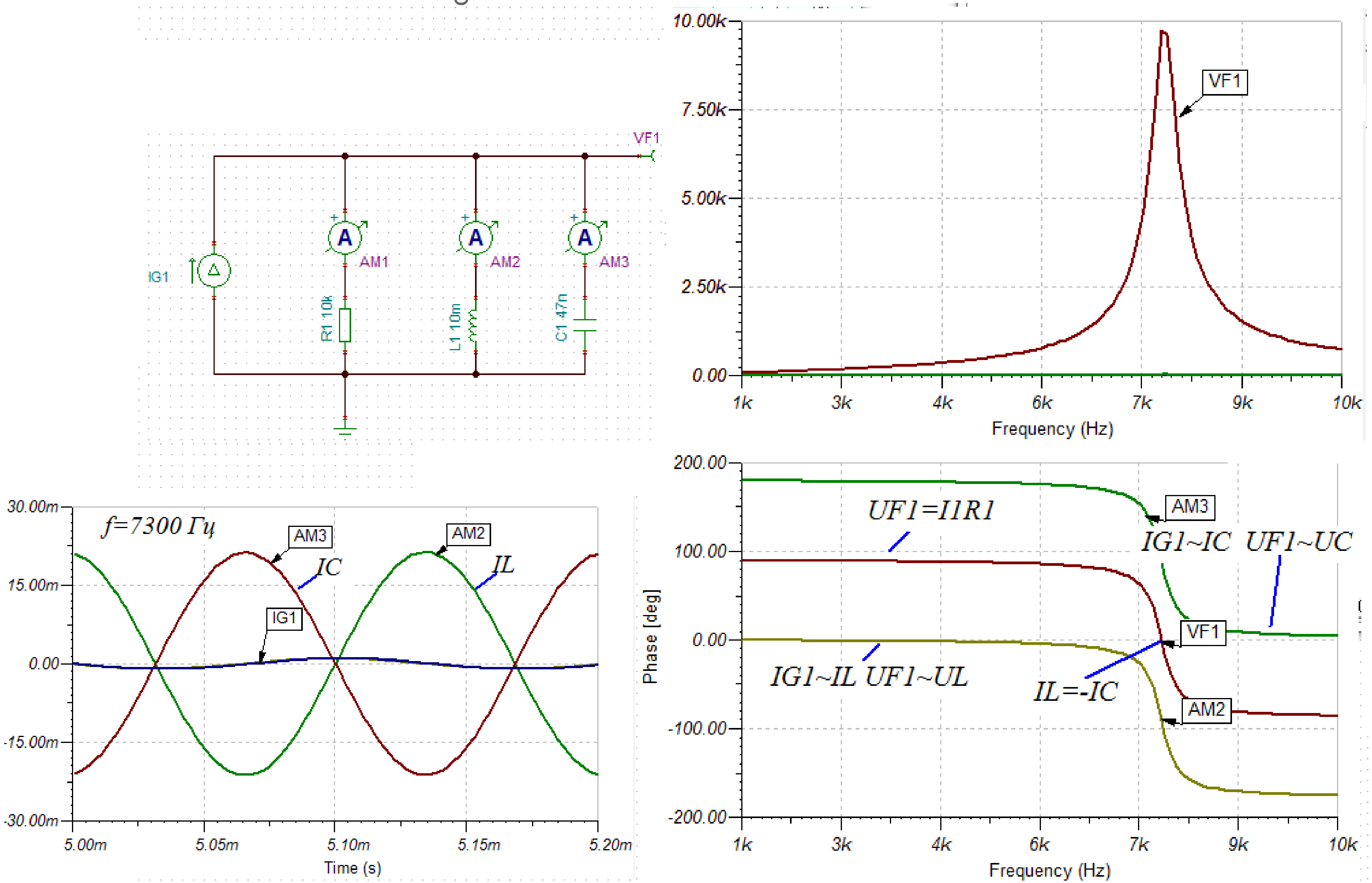
Резонансом токов (параллельным резонансом) называют режим работы параллельной цепи, в котором реактивные проводимости ветвей компенсируют друг друга ($b = b_L - b_C = 0$), входная проводимость цепи становится чисто активной $\underline{Y}_{вх} = \underline{Y}_P = g_P = \dfrac{1}{R_P}$ и входной ток совпадает по фазе с напряжением.



В цепи без потерь при параллельном резонансе ($X_L = X_C$):

$$\underline{Z}_{вх} = \frac{jX_L(-jX_C)}{jX_L - jX_C} = \frac{jX_L(-jX_C)}{0} = \infty$$

AC-Res-Parall.TSC



Пусть: $\underline{Z} = R + jX, \varphi_Z = arctg\frac{X}{R}.$

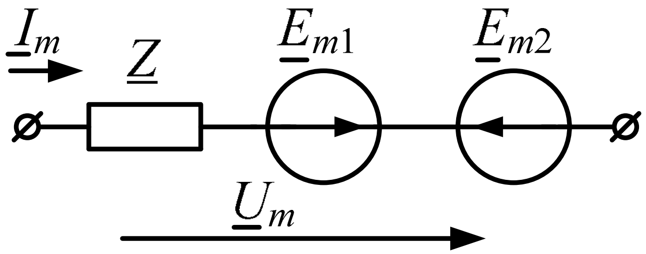
$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R + jX} = \frac{R - jX}{(R + jX)(R - jX)} = \frac{R - jX}{R^2 + X^2} =$$

$$= \frac{R}{R^2 + X^2} - j\frac{X}{R^2 + X^2} = g - jb = ye^{-j\varphi_Y}$$

$$g = \frac{R}{R^2 + X^2}; b = \frac{X}{R^2 + X^2}; \varphi_Y = arctg\frac{b}{g} = arctg\frac{X}{R} = \varphi_Z.$$

Основные законы цепей в символической форме

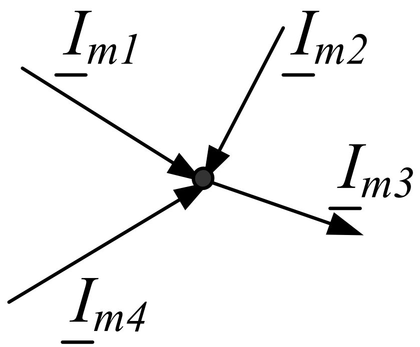
Обобщенный закон Ома:



$$\underline{U}_m = \underline{Z}_m \underline{I}_m \pm \underline{E}_{mk}$$

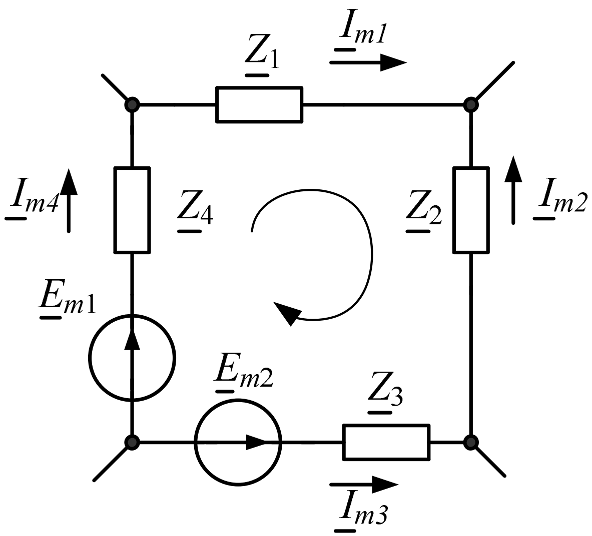
$$\underline{I}_m = \frac{\underline{U}_m \pm \underline{E}_{mk}}{\underline{Z}}$$

Первый закон Кирхгофа:



$$-\underline{I}_{m1} - \underline{I}_{m2} + \underline{I}_{m3} - \underline{I}_{m4} = 0$$

Второй закон Кирхгофа:

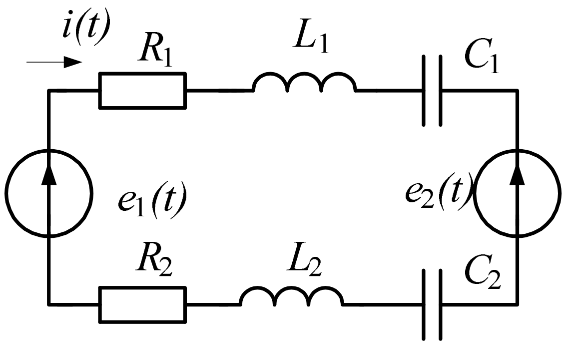


$$\underline{I}_{m1}\underline{Z}_1 - \underline{I}_{m2}\underline{Z}_2 - \underline{I}_{m3}\underline{Z}_3 + \underline{I}_{m4}\underline{Z}_4 = \underline{E}_1 - \underline{E}_2$$

Вывод: Поскольку основные законы в символической форме выполняются все преобразования и метода расчета гармонического тока в символической форме аналогичны методам расчёта цепей постоянного тока при условии замены:

$$E \rightarrow \underline{E}_{m,}\ J \rightarrow \underline{J}_m, U \rightarrow \underline{U}_m, R \rightarrow \underline{Z} = R + jX,\ G \rightarrow \underline{Y} = g + jb$$

Порядок расчёта цепи символическим методом



$$e_1(t) = E_{m1}\,sin(\omega t + \Psi_{E_1})$$

$$e_2(t) = E_{m2}\,cos(\omega t + \Psi_{E_2})$$

1. Приводим функции cosX к sinX:

$$cos(\omega t + \Psi_{E_2}) = sin(\omega t + \Psi_{E_2} + 90^0).$$

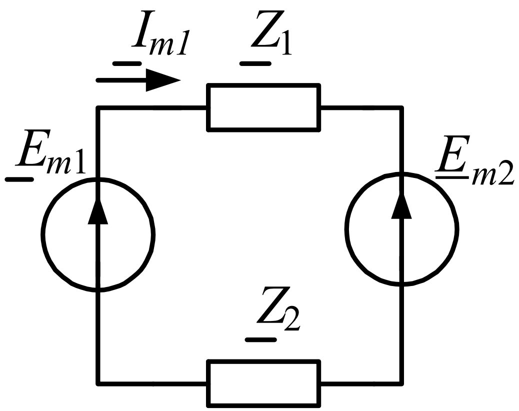
2. Определяем комплексные амплитуды напряжений:

$$\underline{E}_{m1} = E_{m1}e^{j\Psi_E}$$

$$\underline{E}_{m2} = E_{m2}e^{j(\Psi_{E2}+90^0)}$$

3. Находим комплексные сопротивления:

$$\underline{Z}_1 = R_1 + j(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}), \underline{Z}_2 = R_2 + j(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}).$$



4. Переходим к символической схеме замещения:
5. Находим комплексную амплитуду тока.

$$\underline{I}_m = \frac{\underline{E}_{m1} - \underline{E}_{m2}}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = I_m e^{j\Psi_I}$$

6. Находим мгновенное значение тока.

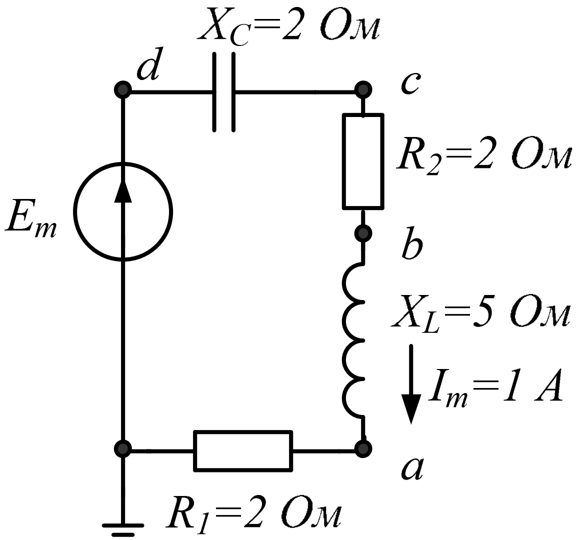
$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \Psi_I).$$

Топографические диаграммы.

Топографическими диаграммами называют изображение на комплексной плоскости комплексных потенциалов различных точек электрической цепи. Нулевой потенциал соответствует началу координат.

Топографическая диаграмма позволяет определять комплексные амплитуды напряжения между различными точками. Если векторы направлены в сторону условно более высокого потенциала, то они будут правильно ориентированы относительно вектора тока.

Пример.



Построить топографическую диаграмму и найти E_m.

Расчет потенциалов:

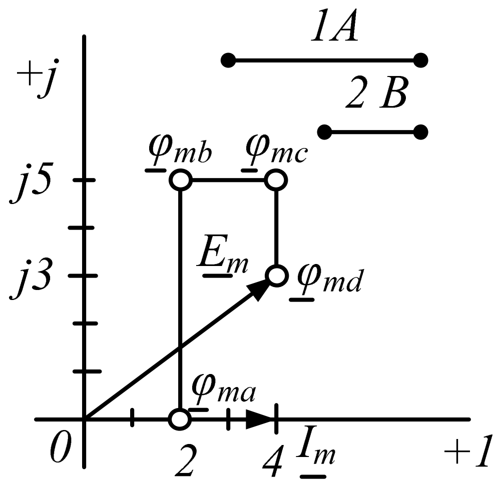
$$\underline{\varphi}_{ma} = \underline{I}_m R = 2\,B;$$

$$\underline{\varphi}_{mb} = \underline{\varphi}_{ma} + j5 \cdot \underline{I}_m = 2 + j5B;$$

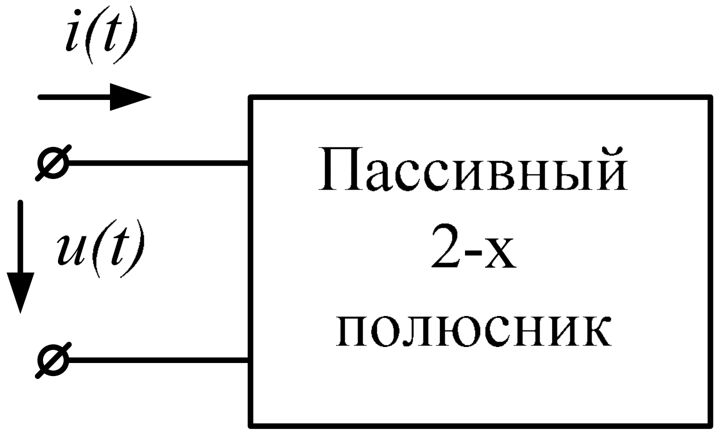
$$\underline{\varphi}_{mc} = \underline{\varphi}_{mb} + 2\underline{I}_m = 4 + j5B;$$

$$\underline{\varphi}_{md} = \underline{\varphi}_{mc} - j2 \cdot \underline{I}_m = 4 + j3B = \underline{E}_m .$$

$$E_m = \sqrt{16+9} = 5\,B.$$



Энергетические соотношения в цепях переменного тока. Мгновенная и средняя мощность.



Мгновенная мощность это скорость изменения энергии:

$$p(t) = u(t)i(t) = \frac{dW(t)}{dt} = u(t)\frac{dq}{dt}$$

$$u(t) = U_m \sin\omega t, (\Psi_U = 0) \Rightarrow \underline{U}_m = \underline{U}_m e^{j0^o} = U_m$$

Входное сопротивление двухполюсника:

$$\underline{Z} = R + jX = Ze^{j\varphi}, Z = \sqrt{R^2 + X^2}, \varphi = arctg\frac{X}{R}.$$

Находим ток: $\underline{I}_m = \dfrac{\underline{U}_m}{Ze^{j\varphi}} = I_m e^{-j\varphi} = \dfrac{U_m}{Z} e^{-j\varphi}$.

Мгновенное значение тока: $i(t) = I_m sin(\omega t - \varphi)$.

Мгновенная мощность:

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = U_m sin\,\omega t \cdot I_m sin(\omega t - \varphi) =$$

$$= \frac{1}{2} U_m I_m \left[cos\,\varphi - cos(2\omega t - \varphi) \right].$$

Когда мгновенная мощность положительна, она потребляется в цепи. Отрицательная мгновенная мощность отдается из цепи в источники.

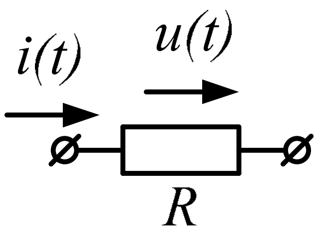
Среднее значение мгновенной мощности за период называется **активной мощностью**:

$$P_{cp} = P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{U_m I_m}{2} cos\,\varphi,$$

$$\varphi = arctg\frac{X}{R},\ (-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le +\frac{\pi}{2}),\ 0 \le cos\,\varphi \le 1,\ \ P \ge 0.$$

Пассивный двухполюсник потребляет энергию.

Действующие значения токов и напряжения.



В активном сопротивлении

$$\underline{Z} = R,\ \varphi = arctg\frac{X}{R} = arctg\frac{0}{R} = 0, cos\,\varphi = 1.$$

Ток совпадает по фазе с напряжением. Гармонический ток выделяет активную мощность:

$$P = P_{cp} = \frac{U_m I_m}{2} = \frac{I_m^2 R}{2},\ \text{так как}\ U_m = I_m \cdot R.$$

Постоянный ток выделяет в том же сопротивлении мощность:

$$P = UI = I^2 R.$$

Определение. Действующее значение переменного тока (напряжения) равно по величине такому постоянному току (напряжению), который выделяет в сопротивлении R то же количество тепла, что и переменный ток.

Приравниваем мощности: $I^2 R = \dfrac{I_m^2 R}{2}$.

Получим действующее значение тока $I = \dfrac{I_m}{\sqrt{2}}$.

Аналогично действующие значения напряжений: $U = \dfrac{U_m}{\sqrt{2}},\ E = \dfrac{E_m}{\sqrt{2}}$.

Применяют комплексные действующие значения (без индекса «***m***»!!!):

$\underline{I} = \dfrac{\underline{I}_m}{\sqrt{2}}, \underline{U} = \dfrac{\underline{U}_m}{\sqrt{2}}, \underline{E} = \dfrac{\underline{E}_m}{\sqrt{2}}$, комплексное сопротивление $\underline{Z} = \dfrac{\underline{U}}{\underline{I}}$.

При переходе к мгновенным значениям модуль действующего тока умножают на $\sqrt{2}$:

$$i(t) = I\sqrt{2}\,sin(\omega t - \varphi) = I_m\,sin(\omega t - \varphi).$$

Активная, реактивная и полная мощность

Активная мощность:

$$P = \frac{U_m I_m}{2} cos\varphi = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \cdot \frac{I_m}{\sqrt{2}} cos\varphi = UI\,cos\varphi = IZI\,cos\varphi = I^2 Z\,cos\varphi = I^2 R = \frac{U^2}{R}.$$

$$P = UI\,cos\varphi \text{ [Вт].}$$

Полная мощность: $S = UI = I^2 Z = \dfrac{U^2}{Z}$ [ВА].

$P = S\,cos\varphi,\ cos\varphi = \dfrac{P}{S}$ - коэффициент мощности.

Реактивная мощность:

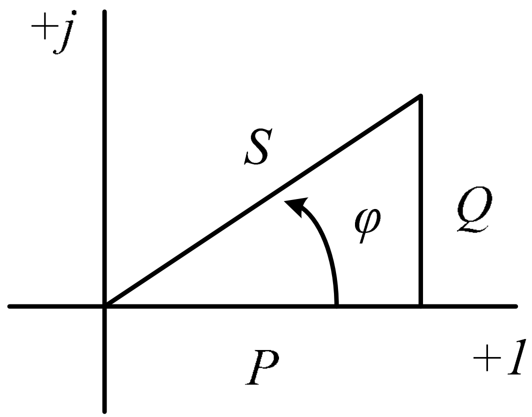
$$Q = S\,sin\varphi = UI\,sin\varphi = IZI\,sin\varphi = I^2 X = I^2 (X_L - X_C) \text{[Вар].}$$

$Q > 0$, если $\varphi > 0$ (индуктивная нагрузка).

$Q < 0$, если $\varphi < 0$ (емкостная нагрузка).

Реактивная мощность не потребляется в цепи, а характеризует обмен мощности между источниками и накопительными элементами L и C.

Треугольник мощности



Подобен треугольнику сопротивлений.

$$P = S\cos\varphi,\ Q = S\sin\varphi,\ S = \sqrt{P^2 + Q^2}\,.$$

Расчёт мощности в комплексной форме

Мгновенные значения: $u(t) = U_m \sin\omega t, i(t) = I_m \sin(\omega t - \varphi).$

Действующие значения: $\underline{U} = \frac{\underline{U}_m}{\sqrt{2}} = \frac{U_m}{\sqrt{2}}, \underline{I} = \frac{\underline{I}_m}{\sqrt{2}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} e^{-j\varphi}.$

Возьмем комплексно-сопряженное значение тока: $\underline{I}^* = Ie^{+j\varphi}.$

Комплексная мощность:

$$\tilde{S} = \underline{U}\underline{I}^* = \underline{I}\underline{Z}\underline{I}^* = I^2\underline{Z} = I^2(R + jX) = P + jQ.$$

Реактивная мощность Q характеризует накопление и возвращение энергии в цепи, содержащей элементы C, L.

Баланс мощности

В цепи гармонического тока выполняется баланс комплексных мощностей: $\sum\limits_{n}\tilde{S}_{ист}=\sum\limits_{k}\tilde{S}_{потр}$.

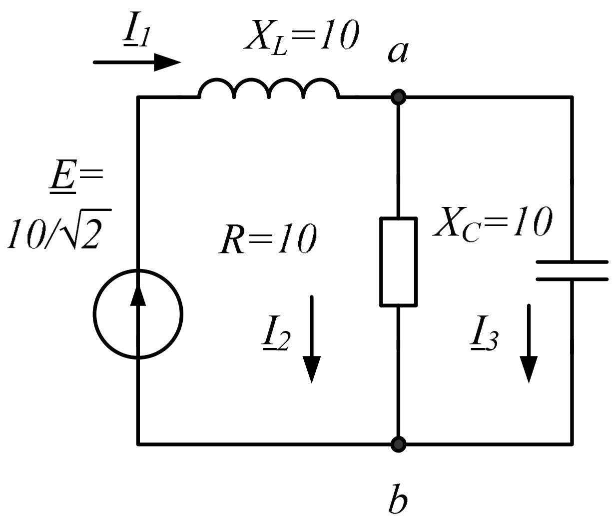
Значит выполняются:

баланс активных мощностей: $\sum\limits_{n}P_{ист}=\sum\limits_{k}P_{потр}$ и

баланс реактивных мощностей: $\sum\limits_{n}Q_{ист}=\sum\limits_{k}Q_{потр}$.

Расчет реактивной мощности: $Q=\sum\limits_{k}I_{k}^{2}(X_{Lk}-X_{Ck})$ - сумма по всем ветвям.

Пример.



Задано действующее значение $\underline{E} = \dfrac{10}{\sqrt{2}} B.$

Рассчитать токи и проверить баланс мощностей.

$$\underline{Z}_{ab} = \frac{10(-j10)}{10-j10} = \frac{-j10}{\sqrt{2}e^{-j45^o}} =$$

$$\frac{10}{\sqrt{2}}e^{-j45^o} = \frac{10}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1-j) = 5 - j5\,Ом.$$

$$\underline{Z} = jX_L + \underline{Z}_{ab} = j10 + 5 - j5\,Ом = 5 + j5 = 5\sqrt{2}e^{j45^o}\,Ом,$$

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}} = \frac{10}{\sqrt{2} \cdot 5 \cdot \sqrt{2}e^{+j45^o}} = 1e^{-j45^o}\ A,$$

$$\underline{U}_{ab} = \underline{I}_1\underline{Z}_{ab} = 1e^{-j45^o} \cdot 5\sqrt{2}e^{-j45^o} = 5\sqrt{2}e^{-j90^o}\ B,$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_{ab}}{R} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-j90^o};\ \underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_{ab}}{-j10} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

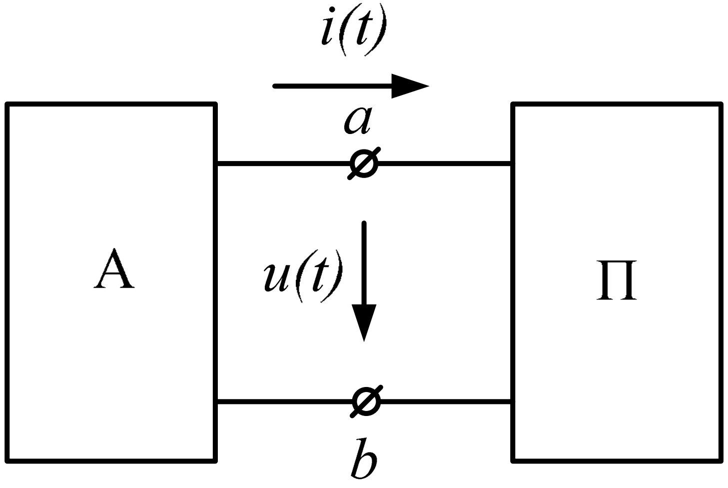
Баланс мощности: $\tilde{S}_{ист} = \underline{E}\underline{I}_1^* = \frac{10}{\sqrt{2}} \cdot 1e^{+j45^o} = 5 + j5$ ВА,

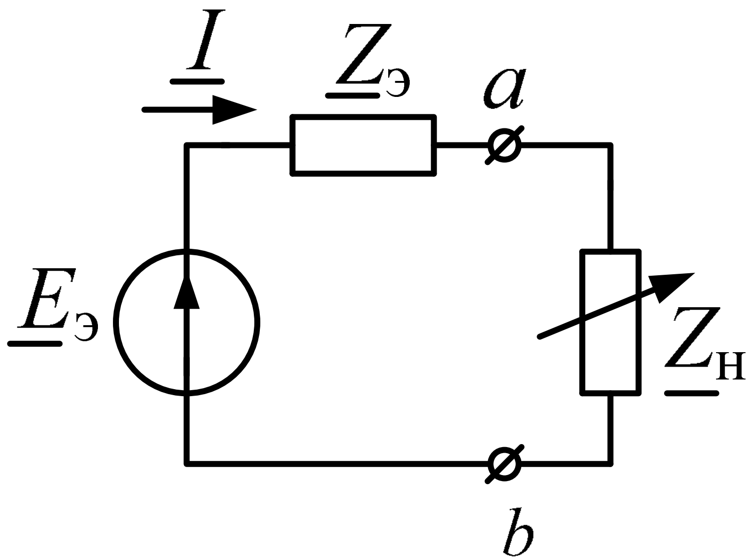
$\sum P_{потр} = I_2^2 R = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5$ Вт.

$\sum Q_{потр} = I_1^2 X_L - I_2^2 X_C = 1 \cdot 10 - \frac{1}{2} \cdot 10 = 5$ Вар

$$\tilde{S}_{ист} = P + jQ.$$

Согласование источников энергии с нагрузкой в цепи переменного тока





Определим, при каких значениях $\underline{Z}_н$ в ней выделяется наибольшая мощность.

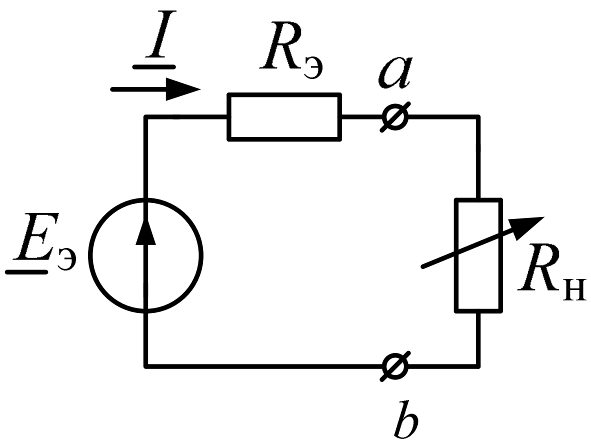
$P = I^2 R_н$. Пусть $\underline{Z}_э = R_э + jX_э$, $\underline{Z}_н = R_н + jX_н$.

$$\underline{I} = \frac{\underline{E}_Э}{\underline{Z}_э + \underline{Z}_н} = \frac{\underline{E}_Э}{R_э + jX_э + R_н + jX_н},$$

$$I = \frac{E_э}{\sqrt{(R_э + R_н)^2 + (X_э + X_н)^2}},$$

$$P = I^2 R_н = \frac{E_Э^2 R_н}{(R_э + R_н)^2 + (X_э + X_н)^2}.$$

Мощность будет больше, если знаменатель меньше.



Первое условие: $X_э + X_н = 0;\ X_н = -X_э.$

Получаем цепь с резисторами.

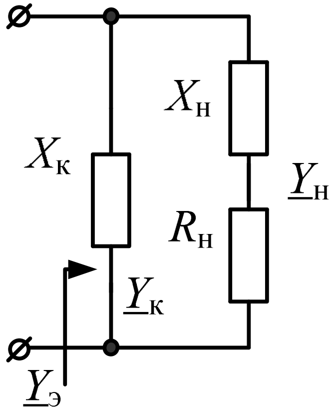
Второе условие: $R_э = R_н.$

Условие выделения наибольшей мощности:

$$R_н + jX_н = R_э - jX_э$$

$$\underline{Z}_н = \underline{Z}_Э^*$$

Комплексное сопротивление нагрузки равно комплексно-сопряженному внутреннему сопротивлению источника.



Методы согласования

Повышение коэффициента мощности *cos*φ.

Подключают дополнительный реактивный элемент $X_к$.

Проводимость нагрузки:

$$\underline{Y}_н = g_н - jb_н = \frac{1}{R_н + jX_н} = \frac{R_н}{R_н^2 + X_н^2} - j\frac{X_н}{R_н^2 + X_н^2}.$$

Проводимость $\underline{Y}_к = \dfrac{1}{jX_к} = +j\dfrac{X_н}{R_н^2 + X_н^2} = +jb_н.$ Тогда:

$\underline{Y}_э = \underline{Y}_к + \underline{Y}_н = g_н - jb_н + jb_н = g_н = G_э$ - активная проводимость.