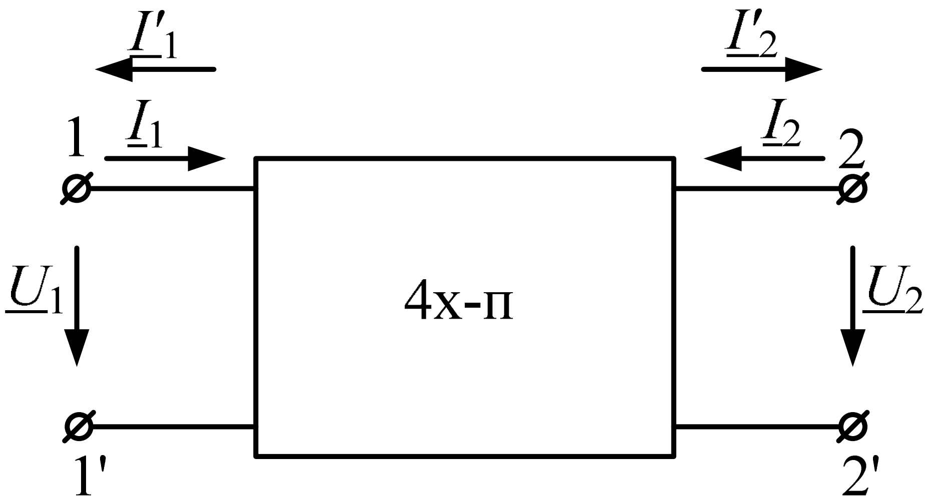
ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКИ

Четырехполюсником называется электрическая цепь, которая имеет 2 входных и 2 выходных зажима



1-1`– первичные зажимы;
2-2`-вторичные зажимы.

Классификация четырехполюсников

Четырехполюсники бывают:

1. Пассивные (без источников энергии).
2. Активные (содержат источники энергии).
3. Линейные (содержат только линейные элементы).
4. Нелинейные (есть нелинейные элементы).
5. Симметричные (при перемене местами входных и выходных зажимов токи и напряжения во внешней цепи не меняются).
6. Несимметричные (не обладают свойствами симметричных).
7. Обратимые – в которых взаимная проводимость входного и выходного контура не зависит от того, какая из двух пар зажимов является первичной, а какая вторичной.

Все линейные пассивные четырехполюсники обратимы !!!

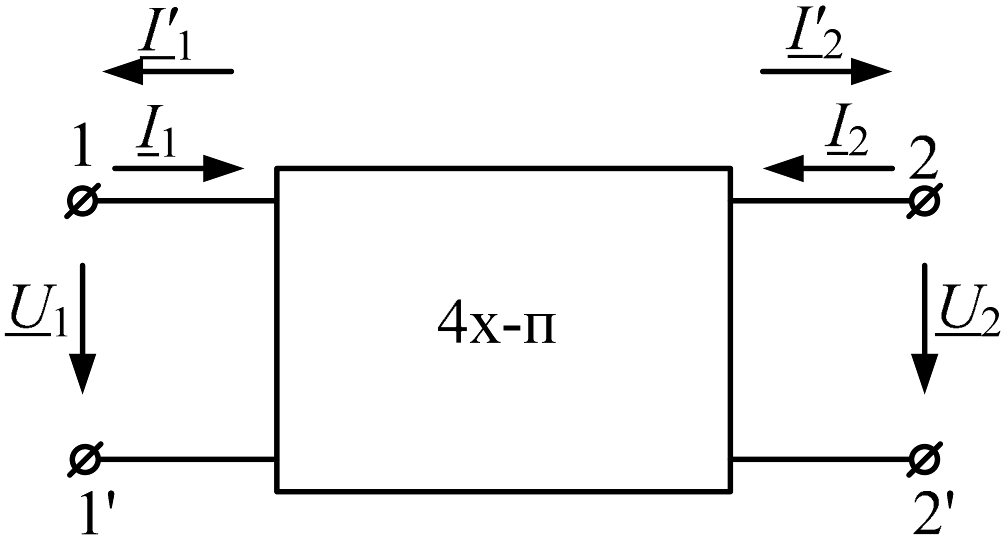
Необратимые – несимметричные активные четырехполюсники.

Задачи теории четырехполюсников

1. Нахождение токов и напряжений на входе и выходе 4х-полюсника по его обобщённым параметрам, без расчета режима внутри 4х-полюсника.
2. Вычисление параметров сложных 4х-полюсников, образованных, включением более простых.

Теория линейных пассивных четырехполюсников

Основные уравнения и параметры четырехполюсников

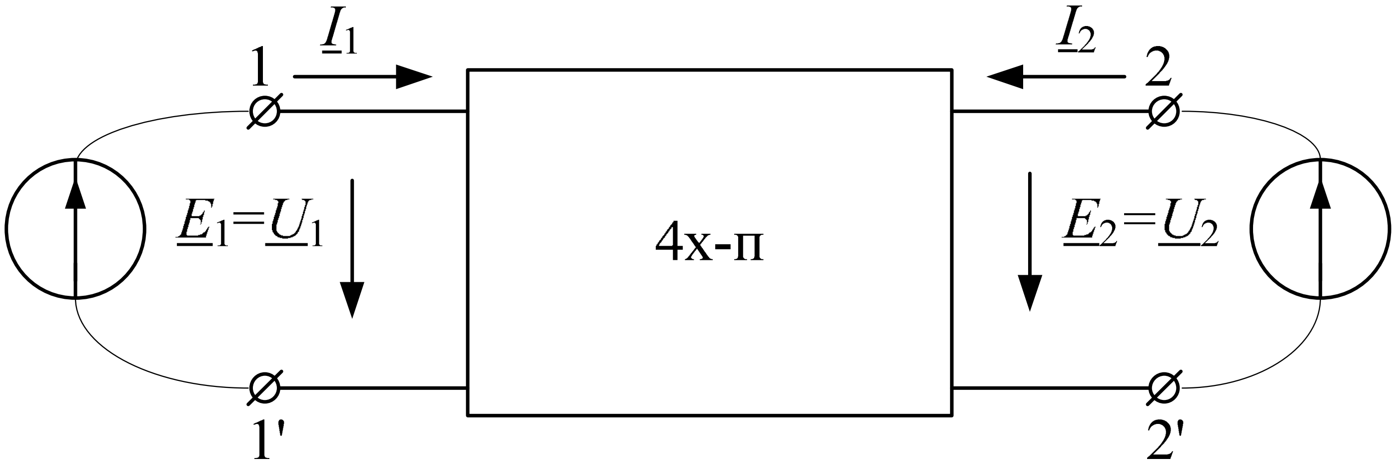


Таблица

Дано	$\underline{U}_1, \underline{U}_2$	$\underline{I}_1, \underline{I}_2$	$\underline{U}_2, \underline{I}_2$`	$\underline{I}_1, \underline{U}_2$	$\underline{U}_1, \underline{I}_2$`	$\underline{U}_1, \underline{I}_1$`
Определить	$\underline{I}_1, \underline{I}_2$	$\underline{U}_1, \underline{U}_2$	$\underline{U}_1, \underline{I}_1$	$\underline{U}_1, \underline{I}_2$	$\underline{I}_1, \underline{U}_2$	$\underline{U}_2, \underline{I}_2$
Параметры	Y	Z	A	H	G	B

В линейных цепях заданные и определяемые токи и напряжения связаны системами 2-х линейных уравнений. Коэффициенты этих уравнений называют параметрами четырехполюсника.

Система Y параметров



Дано: $\underline{U}_1, \underline{U}_2$

Найти: $\underline{I}_1, \underline{I}_2$

Считаем, что к четырехполюснику подключены два источника напряжения: $\underline{E}_1 = \underline{U}_1, \underline{E}_2 = \underline{U}_2$.

По методу наложения:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_1' + \underline{I}_1'' = \underline{Y}_{11}\underline{U}_1 + \underline{Y}_{12}\underline{U}_2$$
$$\underline{I}_2 = \underline{I}_2' + \underline{I}_2'' = \underline{Y}_{21}\underline{U}_1 + \underline{Y}_{22}\underline{U}_2$$
.

Составляющие тока обусловлены действием каждого напряжения по отдельности. Коэффициенты при напряжениях являются проводимостями и называются Y- параметры.

Физический смысл и непосредственное определение Y-параметров

$\underline{Y}_{11} = \dfrac{\underline{I}_1}{\underline{U}_1}\left(\underline{U}_2 = 0\right)$ - входная проводимость при КЗ на выходе;

$\underline{Y}_{22} = \dfrac{\underline{I}_2}{\underline{U}_2}\left(\underline{U}_1 = 0\right)$- входная проводимость со стороны выходных зажимов при КЗ на входе (выходная проводимость);

$\underline{Y}_{21} = \dfrac{\underline{I}_2}{\underline{U}_1}\left(\underline{U}_2 = 0\right)$-прямая передаточная проводимость при КЗ на выходе;

$\underline{Y}_{12} = \dfrac{\underline{I}_1}{\underline{U}_2}\left(\underline{U}_1 = 0\right)$- обратная передаточная проводимость при КЗ на входе.

Свойства Y - параметров

1. $Y_{12}=Y_{21}$- в обратимом четырехполюснике всегда выполняется. Линейный пассивный четырехполюсник имеет 3 независимых Y-

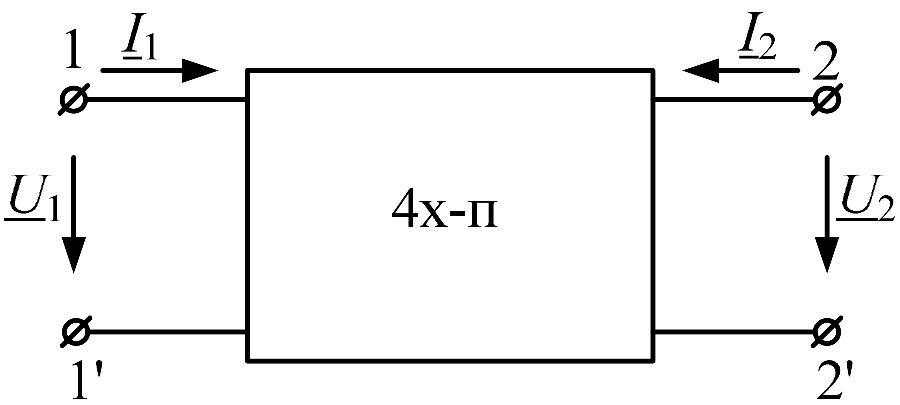
параметра.

2. В симметричном обратимом четырехполюснике $Y_{12}=Y_{21}$; $Y_{11}=Y_{22}$. Имеем 2 независимых Y-параметра.

Матричная форма уравнений

$$\begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{Y}_{11} & \underline{Y}_{12} \\ \underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{pmatrix}, \quad \left|\underline{Y}\right| = \underline{Y}_{11}\underline{Y}_{22} - \underline{Y}_{12}\underline{Y}_{21}.$$

Система Z –параметров



Дано: $\underline{I}_1, \underline{I}_2$.

Найти: $\underline{U}_1, \underline{U}_2$.

$$\underline{U}_1 = \underline{Z}_{11}\underline{I}_1 + \underline{Z}_{12}\underline{I}_2$$

$$\underline{U}_2 = \underline{Z}_{21}\underline{I}_1 + \underline{Z}_{22}\underline{I}_2$$

Физический смысл и непосредственное определение Z-параметров

$\underline{Z}_{11} = \dfrac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1}\left(\underline{I}_2 = 0\right)$ -входное сопротивление четырехполюсника при холостом ходе вторичных зажимов (ХХ2);

$\underline{Z}_{22} = \dfrac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2}\left(\underline{I}_1 = 0\right)$- входное сопротивление со стороны выходных зажимов при ХХ1 первичных зажимов (выходное сопротивление);

$\underline{Z}_{21} = \dfrac{\underline{U}_2}{\underline{I}_1}\left(\underline{I}_2 = 0\right)$- прямое передаточное сопротивление при ХХ2;

$\underline{Z}_{12} = \dfrac{\underline{U}_1}{\underline{I}_2}\left(\underline{I}_1 = 0\right)$- обратное передаточное сопротивление при ХХ1.

В обратимом четырехполюснике: $\underline{Z}_{12}=\underline{Z}_{21}$ – 3 независимых Z - параметра.

В симметричных обратимых четырехполюсниках: $\underline{Z}_{12}=\underline{Z}_{21}$; $\underline{Z}_{11}=\underline{Z}_{22}$ – 2 независимых Z – параметра.

Связь Y и Z параметров

Уравнения в Y параметрах: $$\begin{aligned}\underline{I}_1 &= \underline{Y}_{11}\underline{U}_1 + \underline{Y}_{12}\underline{U}_2\\ \underline{I}_2 &= \underline{Y}_{21}\underline{U}_1 + \underline{Y}_{22}\underline{U}_2\end{aligned}.$$

Решим эти уравнения относительно $\underline{U}_1$ и $\underline{U}_2$.

$$\begin{pmatrix}\underline{U}_1\\ \underline{U}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\underline{Y}_{11} & \underline{Y}_{12}\\ \underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{22}\end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix}\underline{I}_1\\ \underline{I}_2\end{pmatrix} = \frac{1}{|Y|}\begin{pmatrix}\underline{Y}_{22} & -\underline{Y}_{21}\\ -\underline{Y}_{12} & \underline{Y}_{11}\end{pmatrix}^{T} \begin{pmatrix}\underline{I}_1\\ \underline{I}_2\end{pmatrix} = ...$$

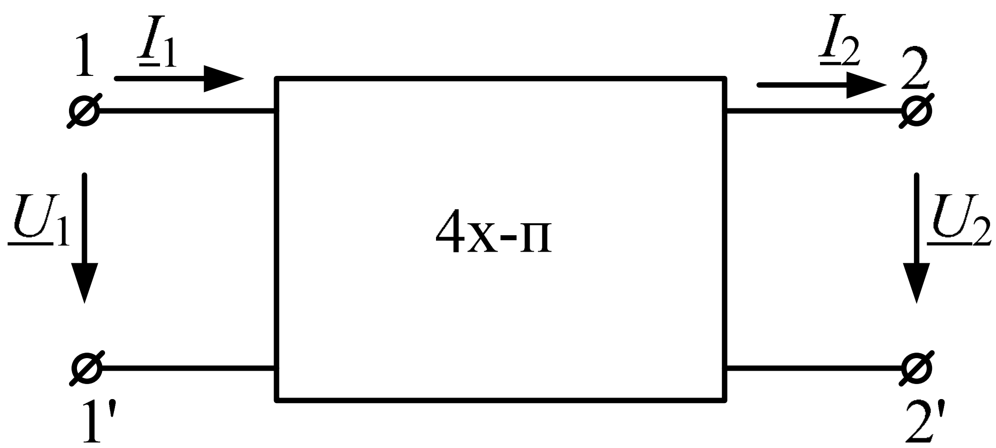
$$
=\frac{1}{|Y|}\begin{pmatrix} \underline{Y}_{22} & -\underline{Y}_{12} \\ -\underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{11} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix}.
$$

Получили решение, подобное системе Z-параметров, и находим связь Z и Y:

$$
\begin{aligned}
\underline{U}_1 &= \frac{\underline{Y}_{22}}{|Y|}\underline{I}_1 - \frac{\underline{Y}_{12}}{|Y|}\underline{I}_2 \\
\underline{U}_2 &= -\frac{\underline{Y}_{21}}{|Y|}\underline{I}_1 + \frac{\underline{Y}_{11}}{|Y|}\underline{I}_2
\end{aligned},\quad
\begin{pmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{Y}_{22}/|Y| & -\underline{Y}_{12}/|Y| \\ -\underline{Y}_{21}/|Y| & \underline{Y}_{11}/|Y| \end{pmatrix}
$$

Система A – параметров

Применяется при анализе передачи энергии от входных зажимов к выходным зажимам. Направление тока $\underline{I}_2$ изменилось.



Дано: $\underline{U}_2, \underline{I}_2$.

Найти: $\underline{U}_1, \underline{I}_1$.

$$\underline{U}_1 = \underline{A}_{11}\underline{U}_2 + \underline{A}_{12}\underline{I}_2$$

$$\underline{I}_1 = \underline{A}_{21}\underline{U}_2 + \underline{A}_{22}\underline{I}_2$$

Связь A и Y –параметров

$$\underline{A}_{11} = -\frac{\underline{Y}_{22}}{\underline{Y}_{21}}, \underline{A}_{12} = -\frac{1}{\underline{Y}_{21}}, \underline{A}_{21} = -\frac{|Y|}{\underline{Y}_{21}}, \underline{A}_{22} = -\frac{\underline{Y}_{11}}{\underline{Y}_{21}}.$$

$$\left|A\right| = \underline{A}_{11}\underline{A}_{22} - \underline{A}_{21}\underline{A}_{12} = \frac{\underline{Y}_{22}}{\underline{Y}_{21}}\frac{\underline{Y}_{11}}{\underline{Y}_{21}} - \frac{1}{\underline{Y}_{21}}\frac{\left|Y\right|}{\underline{Y}_{21}} =$$

$$= \frac{\underline{Y}_{11}\underline{Y}_{22} - \underline{Y}_{11}\underline{Y}_{22} + \underline{Y}_{12}\underline{Y}_{21}}{\underline{Y}_{21}^{2}} = \frac{\underline{Y}_{12}}{\underline{Y}_{21}}.$$

В любом обратном четырехполюснике $\dfrac{\underline{Y}_{12}}{\underline{Y}_{21}} = 1 \Rightarrow \left|\underline{A}\right| = 1$.

Определитель системы А-параметров равен 1.

Следовательно, имеем 3 независимых параметра.

Имеем 3 независимых А параметра.

В симметричном четырехполюснике $\underline{A}_{11} = \underline{A}_{22} \Rightarrow$ следовательно, имеем 2 независимых А – параметра.

Физический смысл и непосредственное определение А-параметров

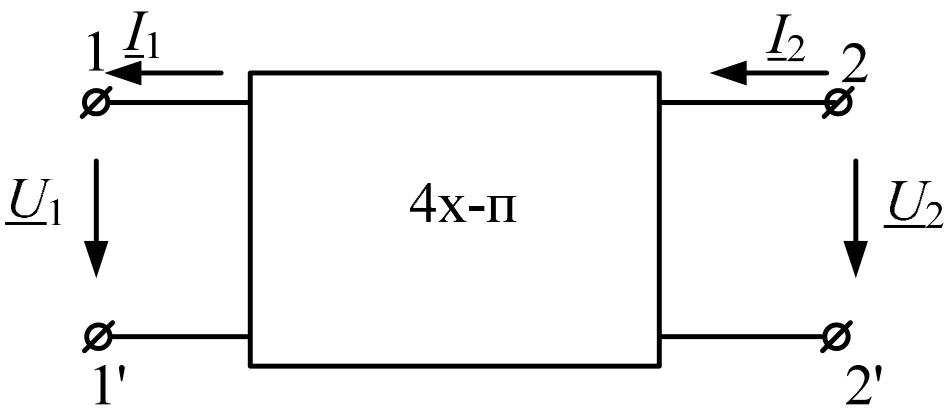
$\underline{A}_{11} = \dfrac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2}\left(I_2 = 0\right)$- коэффициент трансформации по напряжению (при ХХ2);

$\underline{A}_{22} = \dfrac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2}\left(U_2 = 0\right)$ - коэффициент трансформации тока (при КЗ2);

$\underline{A}_{12} = \dfrac{\underline{U}_1}{\underline{I}_2}$($U_2$=0) величина, обратная передаточной проводимости при (КЗ2);

$\underline{A}_{21} = \dfrac{\underline{I}_1}{\underline{U}_2}\left(I_2 = 0\right)$ - величина, обратная передаточному сопротивлению (при XX2).

Система B-параметров



Дано: $\underline{U}_1, \underline{I}_1$.

Найти: $\underline{U}_2, \underline{I}_2$.

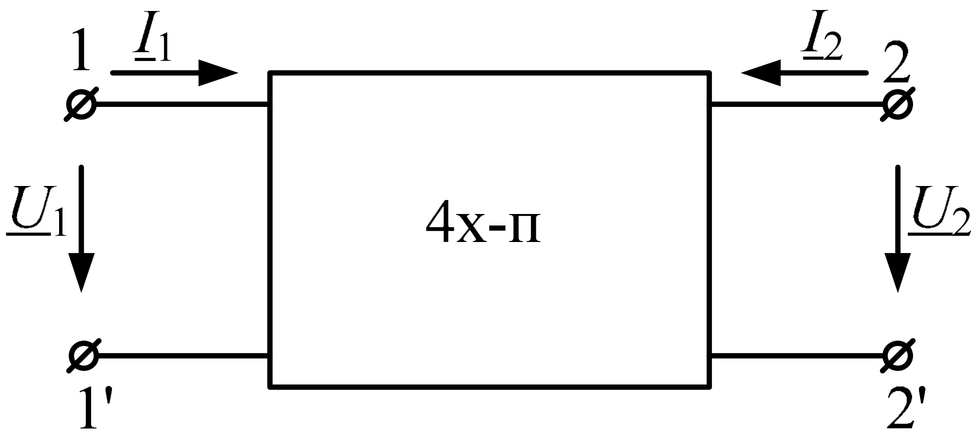
Уравнение в системе B-параметров:

$$\underline{U}_2 = \underline{A}_{22}\underline{U}_1 + \underline{A}_{12}\underline{I}_1$$
$$\underline{I}_2 = \underline{A}_{21}\underline{U}_1 + \underline{A}_{11}\underline{I}_1 .$$

При перемене направления передачи энергии коэффициенты $\underline{A}_{11}$ и $\underline{A}_{22}$

в обратимых четырехполюсниках меняются местами.

Система H-параметров



Дано: $\underline{I}_1, \underline{U}_2$.

Найти: $\underline{U}_1, \underline{I}_2$.

Уравнения в H-параметрах:

$$\underline{U}_1 = \underline{H}_{11}\underline{I}_1 + \underline{H}_{12}\underline{U}_2$$

$$\underline{I}_2 = \underline{H}_{21}\underline{I}_1 + \underline{H}_{22}\underline{U}_2$$

Физический смысл и непосредственное определение Н-параметров

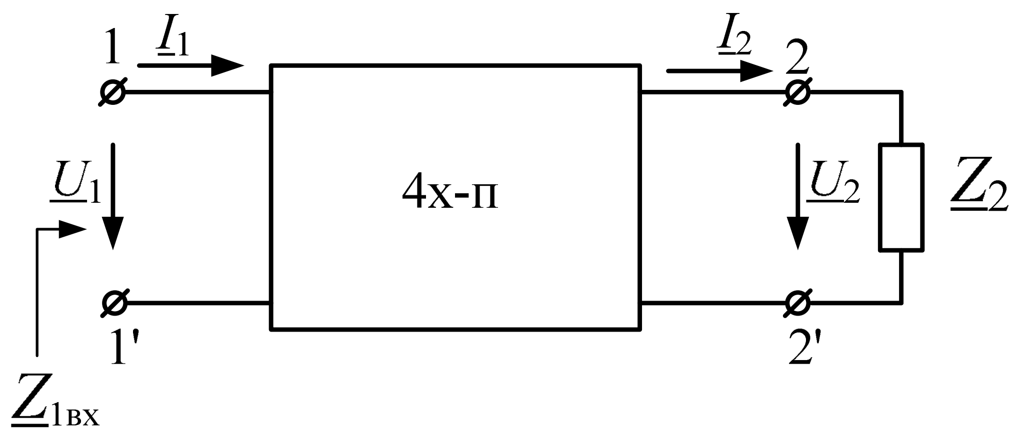
$$\underline{H}_{11} = \left(\frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1}\right)_{\underline{U}_2=0} = \frac{1}{\underline{Y}_{11}}$$ - входное сопротивление при КЗ выхода;

$$\underline{H}_{12} = \left(\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2}\right)_{\underline{I}_1=0} = \frac{1}{\underline{A}_{22}}$$ - коэффициент обратной связи по напряжению при ХХ входа;

$$\underline{H}_{21} = \left(\frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1}\right)_{\underline{U}_2=0}$$ - коэффициент передачи тока при КЗ выхода;

$$\underline{H}_{22} = \left(\frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_2} \right)_{\underline{I}_1 = 0} = \frac{1}{\underline{Z}_{22}}$$ - выходная проводимость при ХХ входа.

Входное сопротивление четырехполюсника

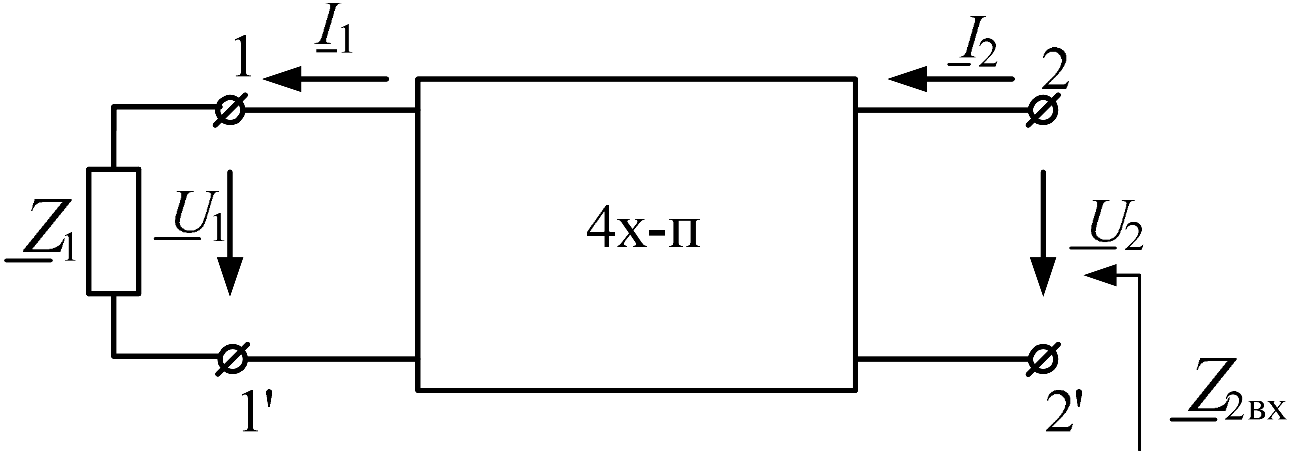


$$\underline{Z}_{1вх} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \frac{\underline{U}_2\underline{A}_{11} + \underline{I}_2\underline{A}_{12}}{\underline{U}_2\underline{A}_{21} + \underline{I}_2\underline{A}_{22}} = \frac{\dfrac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2}\underline{A}_{11} + \underline{A}_{12}}{\dfrac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2}\underline{A}_{21} + \underline{A}_{22}} = \frac{\underline{Z}_2\underline{A}_{11} + \underline{A}_{12}}{\underline{Z}_2\underline{A}_{21} + \underline{A}_{22}}.$$

Частные случаи

Если $\underline{Z}_2 = 0$, $\underline{Z}_{1вх} = \underline{Z}_{1k} = \dfrac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{22}}$. Если $\underline{Z}_2 = \infty$, $\underline{Z}_{1вх} = \underline{Z}_{1x} = \dfrac{\underline{A}_{11}}{\underline{A}_{21}}$.

Входное сопротивление со стороны выходных зажимов



Записываем уравнения в В-параметрах:

$$\underline{U}_2 = \underline{U}_1 \underline{A}_{22} + \underline{I}_1 \underline{A}_{12}$$

$$\underline{I}_2 = \underline{U}_1 \underline{A}_{21} + \underline{I}_1 \underline{A}_{11}$$

Находим: $\underline{Z}_{2вх} = \dfrac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2} = \dfrac{\underline{U}_1 \underline{A}_{22} + \underline{I}_1 \underline{A}_{12}}{\underline{U}_1 \underline{A}_{21} + \underline{I}_1 \underline{A}_{11}} = \dfrac{\underline{Z}_1 \underline{A}_{22} + \underline{A}_{12}}{\underline{Z}_1 \underline{A}_{21} + \underline{A}_{11}}.$

Частные случаи:

Если $\underline{Z}_1 = 0$, $\underline{Z}_{2вх} = \underline{Z}_{2k} = \dfrac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{11}}$. Если $\underline{Z}_1 = \infty$, $\underline{Z}_{2вх} = \underline{Z}_{2x} = \dfrac{\underline{A}_{22}}{\underline{A}_{21}}$.

Свойство четырехполюсника

Четырехполюсник преобразует сопротивление нагрузки. Входное сопротивление четырехполюсника определяется его параметрами и сопротивлением нагрузки.

Параметры холостого хода и короткого замыкания

Сопротивления $Z_{1k}, Z_{2k}, Z_{1x}, Z_{2x}$ называют параметрами ХХ и КЗ.

Свойства параметров ХХ и КЗ

$$\frac{\underline{Z}_{1k}}{\underline{Z}_{1x}} = \frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{22}} \frac{\underline{A}_{21}}{\underline{A}_{11}}; \qquad \frac{\underline{Z}_{2k}}{\underline{Z}_{2x}} = \frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{11}} \frac{\underline{A}_{21}}{\underline{A}_{22}}.$$

Получаем: $\frac{\underline{Z}_{1k}}{\underline{Z}_{1x}} = \frac{\underline{Z}_{2k}}{\underline{Z}_{2x}}$. Можно использовать для проверки измерений и расчетов.

В симметричных четырехполюсниках: $\underline{A}_{11} = \underline{A}_{22}$. При этом получим: $\underline{Z}_{1k} = \underline{Z}_{2k} = \underline{Z}_{k}$, $\underline{Z}_{1x} = \underline{Z}_{2x} = \underline{Z}_{x}$.

Вычисление А-параметров через параметры ХХ и КЗ

В обратимом четырехполюснике: $\left|A\right| = \underline{A}_{11}\underline{A}_{22} - \underline{A}_{12}\underline{A}_{21} = 1$.

Подставляем: $\underline{A}_{21}=\underline{A}_{11}/\underline{Z}_{1x}$, $\underline{A}_{22}=\underline{Z}_{2x}\underline{A}_{21}=\left(\dfrac{\underline{Z}_{2x}}{\underline{Z}_{1x}}\right)\underline{A}_{11}$, $\underline{A}_{12}=\underline{A}_{11}\underline{Z}_{2k}$.

Получим уравнение:

$$\left|A\right|=\underline{A}_{11}\underline{A}_{11}\frac{\underline{Z}_{2x}}{\underline{Z}_{1x}}-\underline{A}_{11}\underline{Z}_{2k}\,\underline{A}_{11}/\underline{Z}_{1x}=1.$$

Находим $\underline{\mathrm{A}}_{11}$: $\underline{A}_{11}^{2}\left(\dfrac{\underline{Z}_{2x}-\underline{Z}_{2k}}{\underline{Z}_{1x}}\right)=1$, $\underline{A}_{11}\sqrt{\dfrac{\underline{Z}_{2x}-\underline{Z}_{2k}}{\underline{Z}_{1x}}}=1$,

$$\underline{A}_{11}=\sqrt{\frac{\underline{Z}_{1x}}{\underline{Z}_{2x}-\underline{Z}_{2k}}}.$$

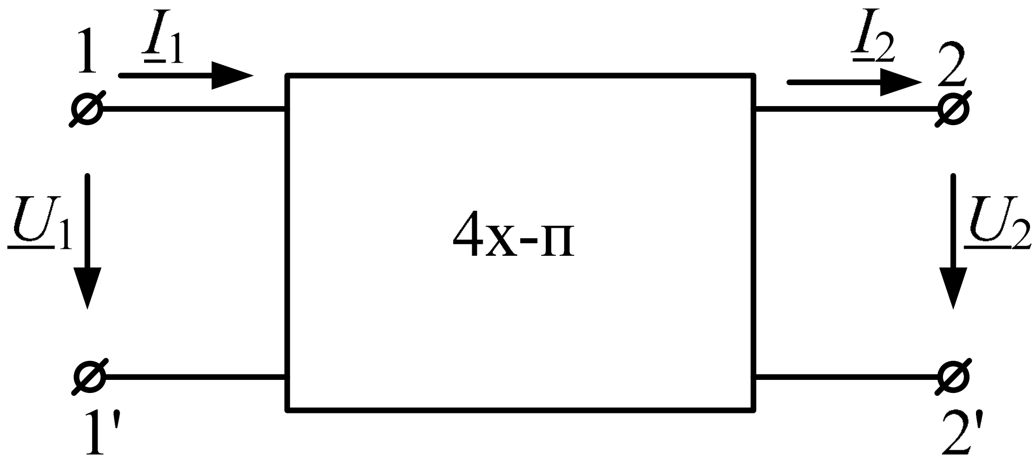
Вычислив $\underline{\mathrm{A}}_{11}$, остальные А-параметры находим по формулам:

$$\underline{A}_{12} = \underline{A}_{11}\underline{Z}_{2k}, \underline{A}_{21} = \underline{A}_{11}\Big/\underline{Z}_{1x}, \underline{A}_{22} = \left(\frac{\underline{Z}_{2x}}{\underline{Z}_{1x}}\right)\underline{A}_{11}.$$

Требуется дополнительная проверка аргумента $\underline{A}_{11}$, так как корень квадратный извлекается неоднозначно.

Схемы замещения четырехполюсника

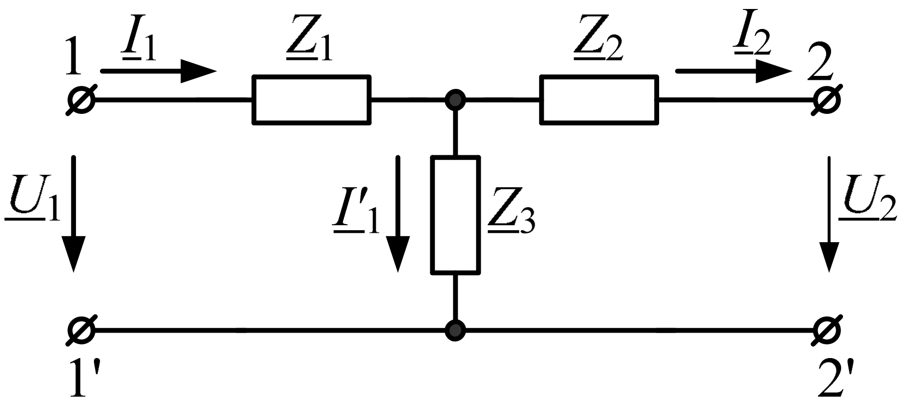
Считаем, что были измерены на заданной частоте и известны А-параметры четырехполюсника и его уравнения:



$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2\underline{A}_{11} + \underline{I}_2\underline{A}_{12}$$
$$\underline{I}_1 = \underline{U}_2\underline{A}_{21} + \underline{I}_2\underline{A}_{22}.$$

Требуется найти схему замещения из пассивных сопротивлений, которая имеет ту же матрицу А-параметров.

Т образная схема замещения



Требуется найти $\underline{Z}_1$, $\underline{Z}_2$, $\underline{Z}_3$.

Составляем уравнения:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_2 + \underline{I}' = \underline{I}_2 + \frac{\underline{U}_2 + \underline{I}_2\underline{Z}_2}{\underline{Z}_3} = \overset{\underline{A}_{21}}{\frac{1}{\underline{Z}_3}}\underline{U}_2 + \overset{\underline{A}_{22}}{\left(1+\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_3}\right)}\underline{I}_2$$

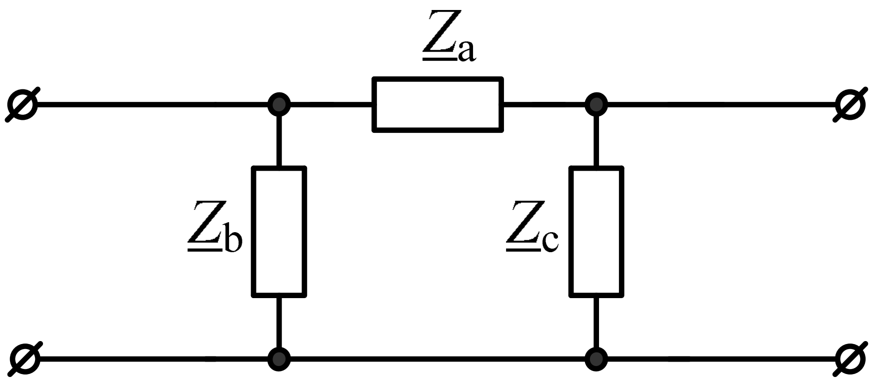
$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 + \underline{I}_2\underline{Z}_2 + \underline{I}_1\underline{Z}_1 = \underline{U}_2 \overset{\underline{A}_{11}}{\left(1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_3}\right)} + \underline{I}_2 \overset{\underline{A}_{12}}{\left(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \frac{\underline{Z}_2\underline{Z}_1}{\underline{Z}_3}\right)}.$$

Выражаем сопротивления через А-параметры:

$$\underline{Z}_1 = \frac{\underline{A}_{11} - 1}{\underline{A}_{21}}, \underline{Z}_2 = \frac{\underline{A}_{22} - 1}{\underline{A}_{21}}, \underline{Z}_3 = \frac{1}{\underline{A}_{21}}.$$

Схема замещения справедлива на той частоте, для которой определены А-параметры.

П-образная схема замещения

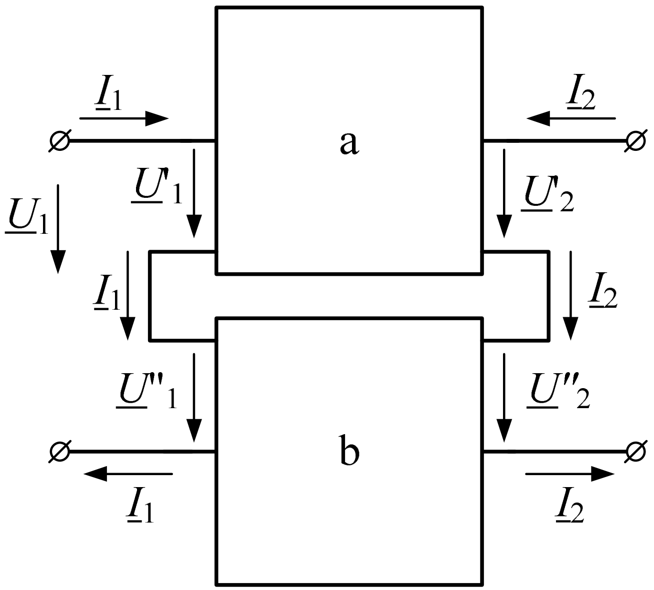


$$\underline{Z}_a = \underline{A}_{12},$$

$$\underline{Z}_b = \frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{22} - 1},$$

$$\underline{Z}_c = \frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{11} - 1}.$$

Соединения четырехполюсников

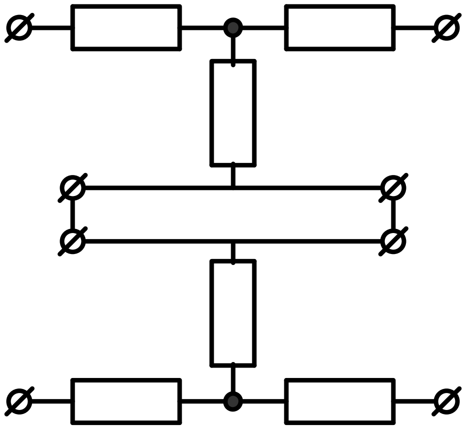


Последовательное соединение

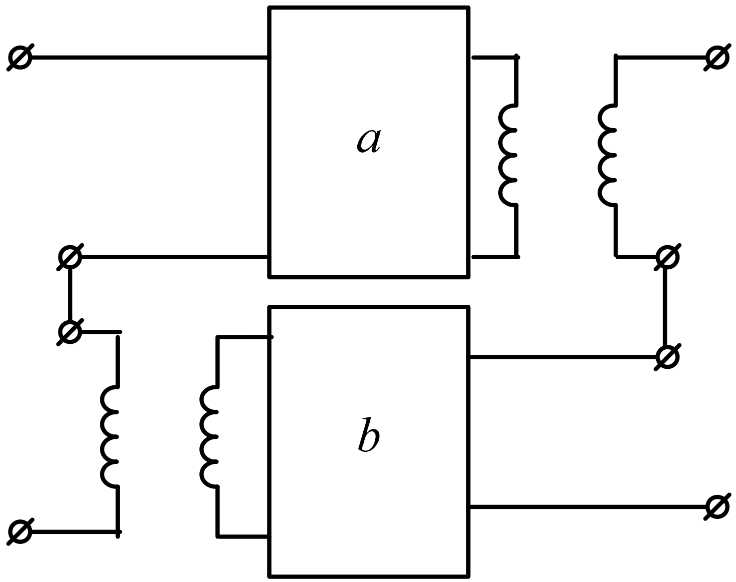
Входные и выходные зажимы включены последовательно.

Соединения четырехполюсников называют **регулярным**, если сохраняется равенство токов подтекающих к верхнему зажиму и вытекающих из нижнего зажима каждого четырехполюсника.

Регулярные соединения имеют:



1. Трехполюсники, соединенные общими зажимами.



2. Четырехполюсники с трансформаторами.

Вывод формулы соединения

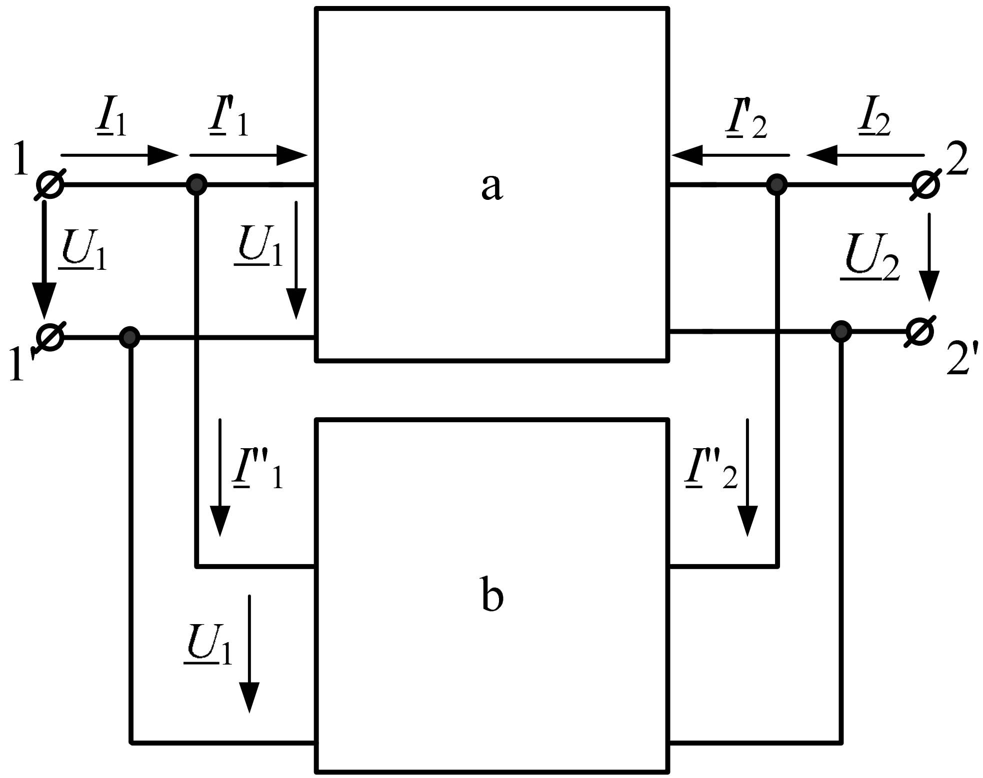
Для «a» : $\begin{pmatrix} \underline{U}_1' \\ \underline{U}_2' \end{pmatrix} = (\underline{Z}_a) \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix}$. Для «b» : $\begin{pmatrix} \underline{U}_1'' \\ \underline{U}_2'' \end{pmatrix} = \underline{Z}_b \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix}$.

В последовательном соединении складываются напряжения на входе и выходе: $\begin{matrix} \underline{U}_1 = \underline{U}_1' + \underline{U}_1'' \\ \underline{U}_2 = \underline{U}_2' + \underline{U}_2'' \end{matrix}.$

$$\begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{U}_1' \\ \underline{U}_2' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \underline{U}_1'' \\ \underline{U}_2'' \end{pmatrix} = \left(\underline{Z}_a + \underline{Z}_b \right) \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix} = \underline{Z} \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix}$$

При последовательном соединении суммируются матрицы Z - параметров: $\underline{Z} = \underline{Z}_a + \underline{Z}_b$.

Параллельное соединение



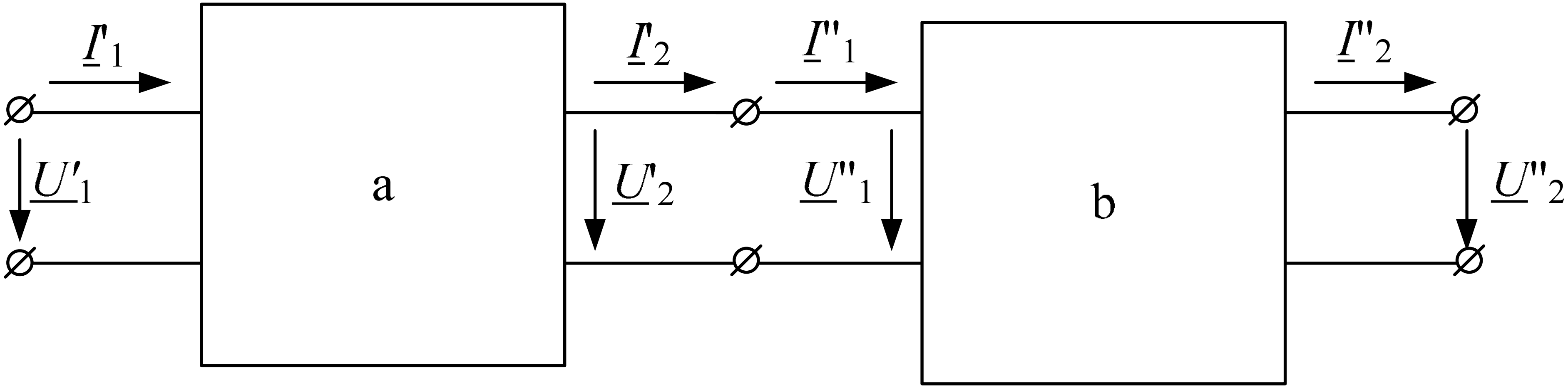
Для «a»: $\begin{pmatrix} \underline{I}_1' \\ \underline{I}_2' \end{pmatrix} = \underline{Y}_a \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{pmatrix}$,

Для «b»: $\begin{pmatrix} \underline{I}_1'' \\ \underline{I}_2'' \end{pmatrix} = \underline{Y}_b \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{I}_1' \\ \underline{I}_2' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \underline{I}_1'' \\ \underline{I}_2'' \end{pmatrix} = \left(\underline{Y}_a + \underline{Y}_б\right)\begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{pmatrix}$$

При параллельном регулярном соединении суммируются матрицы Y-параметров.

Каскадное соединение



Условие регулярности выполняется всегда.

$$\text{Для «a» : } \begin{pmatrix} \underline{U}_1' \\ \underline{I}_1' \end{pmatrix} = \underline{A}_a \begin{pmatrix} \underline{U}_2' \\ \underline{I}_2' \end{pmatrix}. \text{ Для «b» : } \begin{pmatrix} \underline{U}_1'' \\ \underline{I}_1'' \end{pmatrix} = \underline{A}_b \begin{pmatrix} \underline{U}_2'' \\ \underline{I}_2'' \end{pmatrix}.$$

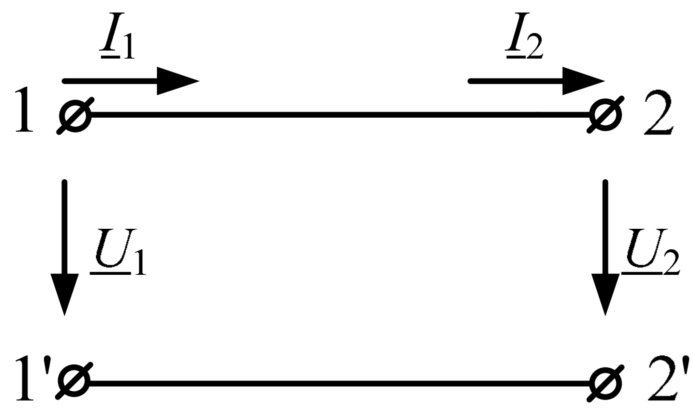
Так как: $\begin{pmatrix} \underline{U}_2' \\ \underline{I}_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{U}_1'' \\ \underline{I}_1'' \end{pmatrix}$, получим: $\begin{pmatrix} \underline{U}_1' \\ \underline{I}_1' \end{pmatrix} = \underline{A}_a \underline{A}_b \begin{pmatrix} \underline{U}_2'' \\ \underline{I}_2'' \end{pmatrix}$.

При каскадном соединении перемножаются матрицы А-параметров.

Расчет А-параметров простых четырехполюсников

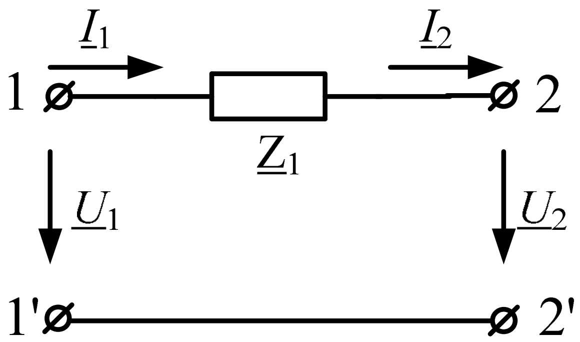
Уравнения в А – параметрах: $\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{A}_{11}\underline{U}_2 + \underline{A}_{12}\underline{I}_2 \\ \underline{I}_1 &= \underline{A}_{21}\underline{U}_2 + \underline{A}_{22}\underline{I}_2 \end{aligned}$.

Прямое соединение



$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{U}_2 \\ \underline{I}_1 &= \underline{I}_2 \end{aligned}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

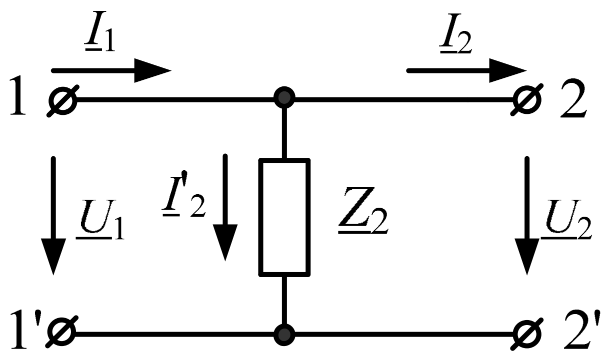
Продольное сопротивление



$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 + \underline{I}_2 \underline{Z}_1, \quad \underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & \underline{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_2$$

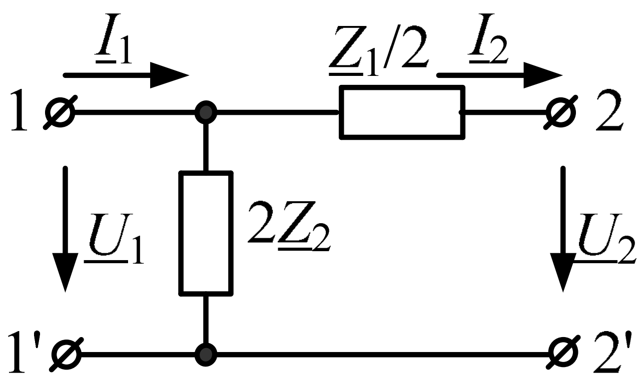
Параллельное сопротивление



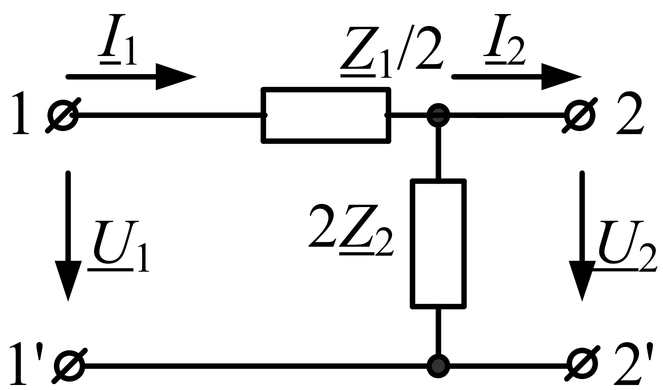
$$\underline{I}_1 = \underline{I}_2 + \underline{I}'_2 = \frac{1}{\underline{Z}_2}\underline{U}_2 + \underline{I}_2$$

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/\underline{Z}_2 & 1 \end{pmatrix}$$

Г-образный 4х-полюсник



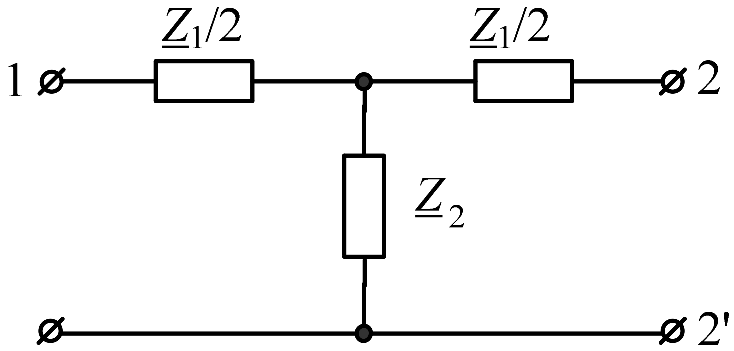
$$\underline{A}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ \frac{1}{2\underline{Z}_2} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \frac{\underline{Z}_1}{2}\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \frac{\underline{Z}_1}{2}\\ \frac{1}{2\underline{Z}_2} & \left(1+\frac{\underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2}\right)\end{pmatrix}$$



$\underline{A}_{11}$ и $\underline{A}_{22}$ поменялись местами.

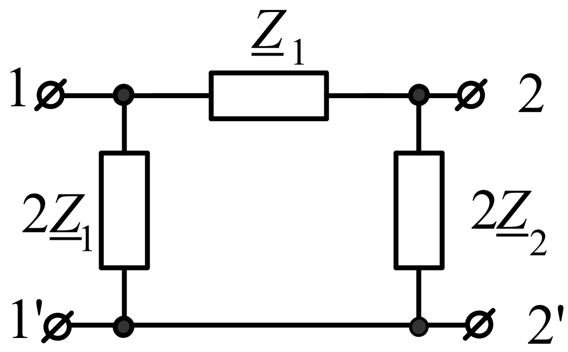
$$\begin{pmatrix}\left(1+\frac{\underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2}\right) & \frac{\underline{Z}_1}{2}\\ \frac{1}{2\underline{Z}_2} & 1\end{pmatrix}$$

Симметричный Т образный



$$\left(\underline{A}_{\Gamma 2}\right)\left(\underline{A}_{\Gamma 1}\right)=\begin{pmatrix} 1+\underline{Z}_1/2\underline{Z}_2 & Z_1\left(1+\frac{Z_1}{4Z_2}\right) \\ 1/Z_2 & 1+\underline{Z}_1/2\underline{Z}_2 \end{pmatrix}$$

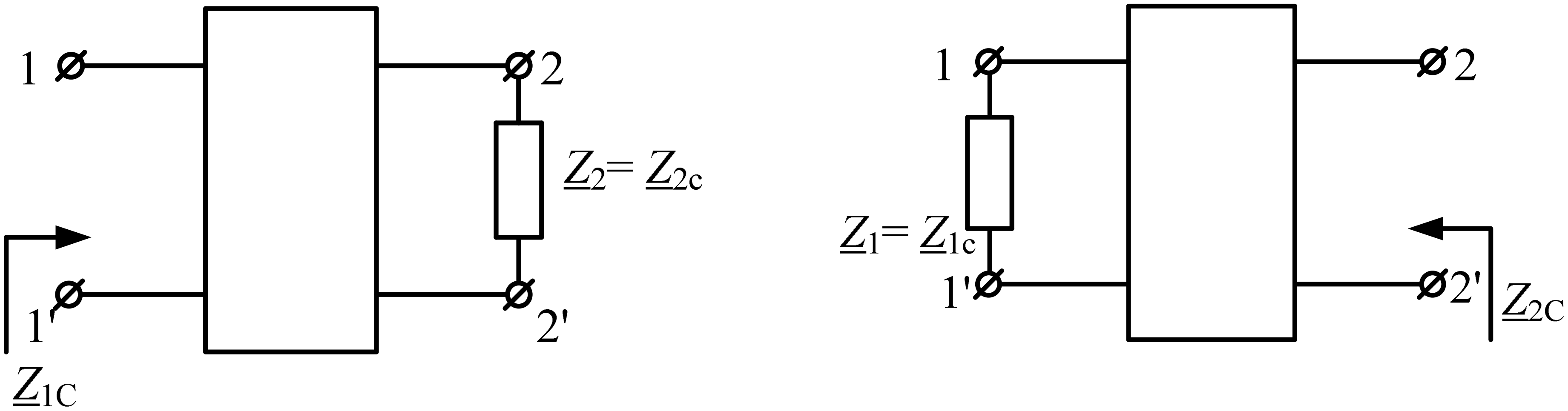
Симметричный П-образный



$$\left(\underline{A}_{\Gamma 1}\right)\left(\underline{A}_{\Gamma 2}\right)=\begin{pmatrix} 1+\underline{Z}_1/2\underline{Z}_2 & \underline{Z}_1 \\ 1/\underline{Z}_2\left(1+\frac{\underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2}\right) & 1+\underline{Z}_1/2\underline{Z}_2 \end{pmatrix}.$$

Характеристические сопротивления

Характеристическими сопротивлениями пассивного четырехполюсника $\underline{Z}_{1c}$ и $\underline{Z}_{2c}$ называются два сопротивления, удовлетворяющие условию полного взаимного согласования, а именно:



$$\text{При } \underline{Z}_2 = \underline{Z}_{2c},\ \underline{Z}_{вх1} = \frac{\underline{A}_{11}\underline{Z}_{2c} + \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}\underline{Z}_{2c} + \underline{A}_{22}} = \underline{Z}_{1c}$$

$$\text{При } \underline{Z}_1 = \underline{Z}_{1c},\ \underline{Z}_{вх2} = \frac{\underline{A}_{22}\underline{Z}_{1c} + \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}\underline{Z}_{1c} + \underline{A}_{11}} = \underline{Z}_{2c}$$

Определение. Четырехполюсник, нагруженный на характеристическое сопротивление, называется согласованным с нагрузкой.

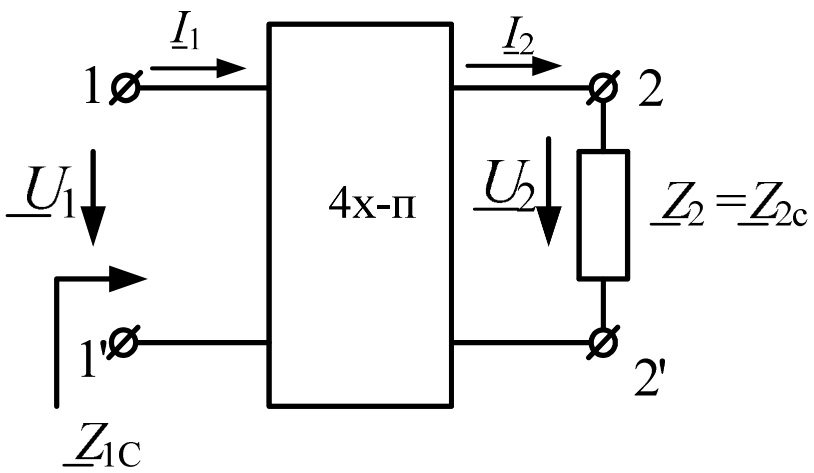
Решая два уравнения, получим выражения для $\underline{Z}_{1c}$ и $\underline{Z}_{2c}$.

$$\underline{Z}_{1c} = \sqrt{\frac{\underline{A}_{11}\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}\underline{A}_{22}}},\quad \underline{Z}_{2c} = \sqrt{\frac{\underline{A}_{22}\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}\underline{A}_{11}}}.$$

$$\sqrt{\underline{Z}_{1c}\underline{Z}_{2c}} = \sqrt{\frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}}},\ \sqrt{\frac{\underline{Z}_{1c}}{\underline{Z}_{2c}}} = \sqrt{\frac{\underline{A}_{11}}{\underline{A}_{22}}},$$

$$\underline{Z}_{1c} = \sqrt{\underline{Z}_{1x}\underline{Z}_{1k}},\ \underline{Z}_{2c} = \sqrt{\underline{Z}_{2x}\underline{Z}_{2k}}.$$

Характеристическая постоянная передачи (мера передачи)



Рассмотрим четырехполюсник, нагруженный на характеристическое сопротивление:
Четырехполюсник согласован с нагрузкой:

$$\underline{Z}_{2c} = \sqrt{\frac{\underline{A}_{22}\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}\underline{A}_{11}}}\ . \ , \qquad \underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_{2c}},\ \underline{U}_2 = \underline{I}_2\underline{Z}_{2c}$$

$$\underline{U}_1 = \underline{A}_{11}\underline{U}_2 + \underline{A}_{12}\underline{U}_2\sqrt{\frac{\underline{A}_{21}\underline{A}_{11}}{\underline{A}_{22}\underline{A}_{12}}}.$$

$$\underline{I}_1 = \underline{A}_{21}\underline{I}_2\sqrt{\frac{\underline{A}_{22}\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}\underline{A}_{11}}} + \underline{A}_{22}\underline{I}_2$$

Преобразуем уравнения:

$$\underline{U}_1 = \sqrt{\frac{\underline{A}_{11}}{\underline{A}_{22}}}\underline{U}_2\left(\sqrt{\underline{A}_{11}\underline{A}_{22}} + \sqrt{\underline{A}_{12}\underline{A}_{21}}\right).$$

$$\underline{I}_1 = \sqrt{\frac{\underline{A}_{22}}{\underline{A}_{11}}}\underline{I}_2\left(\sqrt{\underline{A}_{11}\underline{A}_{22}} + \sqrt{\underline{A}_{12}\underline{A}_{21}}\right)$$

Обозначим: $\sqrt{\dfrac{\underline{A}_{11}}{\underline{A}_{22}}} = \sqrt{\dfrac{\underline{Z}_{1c}}{\underline{Z}_{2c}}} = \underline{m}_T$ --коэффициент трансформации четырехполюсника;

$e^{\underline{g}} = \sqrt{\underline{A}_{11}\underline{A}_{22}} + \sqrt{\underline{A}_{12}\underline{A}_{21}}$;

$\underline{g} = ln\left(\sqrt{\underline{A}_{11}\underline{A}_{22}} + \sqrt{\underline{A}_{12}\underline{A}_{21}}\right) = a + jb$ - характеристическая постоянная передачи, мера передачи;

a – характеристическое затухание;

b - характеристическая фаза, фазовая постоянная.

В симметричном в согласованном режиме четырехполюснике:

$$\underline{A}_{11} = \underline{A}_{22},\, m_T = 1,\, \underline{U}_1 = m_T \underline{U}_2 e^{\underline{g}},\, \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = e^{\underline{g}} = \frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2}.$$

$$e^{\underline{g}} = e^{a+jb} = e^{a}e^{jb} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = \left(\frac{U_1}{U_2}\right)e^{j(\varphi_1-\varphi_2)}.$$

$$e^{a} = \frac{U_1}{U_2};\ a = ln\frac{U_1}{U_2}.$$

Характеристическое затухание симметричного четырехполюсника равно логарифму отношения амплитуд напряжений или токов на входе и выходе.

Затухание измеряют:

В неперах: 1 неп.– затухание в *e* раз: $ln(U_1/U_2)=1$ неп.

В дециbellах : 1дб = 20 lg (U_1/U_2).

1 дб = 0.115 неп. 1 неп.= 8.66 дб

Коэффициент фазы равен сдвигу фазы между входным и выходным напряжением согласованных четырехполюсников: $b = \varphi_1 - \varphi_2$.

В согласованном режиме: $\underline{U}_1 = \underline{m}_T \underline{U}_2 e^{\underline{g}}$, $\underline{I}_1 = \dfrac{1}{\underline{m}_T} \underline{I}_2 e^{\underline{g}}$.

Уравнения четырехполюсника в гиперболической форме

$$e^{\underline{g}} = \sqrt{\underline{A}_{11}\underline{A}_{22}} + \sqrt{\underline{A}_{12}\underline{A}_{21}}.$$

Находим $e^{-\underline{g}} = \dfrac{1}{\sqrt{\underline{A}_{11}\underline{A}_{22}} + \sqrt{\underline{A}_{12}\underline{A}_{21}}} = \dfrac{\sqrt{\underline{A}_{11}\underline{A}_{22}} - \sqrt{\underline{A}_{12}\underline{A}_{21}}}{(\underline{A}_{11}\underline{A}_{22} - \underline{A}_{12}\underline{A}_{21})_{=1}} =$
$\sqrt{\underline{A}_{11}\underline{A}_{22}} - \sqrt{\underline{A}_{12}\underline{A}_{21}}$.

Выразим гиперболические функции:

$\dfrac{e^{\underline{g}} + e^{-\underline{g}}}{2} = ch\underline{g} = \sqrt{\underline{A}_{11}\underline{A}_{22}}$ (1), $\dfrac{e^{\underline{g}} - e^{-\underline{g}}}{2} = sh\underline{g} = \sqrt{\underline{A}_{12}\underline{A}_{21}}$ (2).

Видим, что: $e^{\underline{g}} = ch\underline{g} + sh\underline{g}$.

Ранее было найдено: $\sqrt{\dfrac{\underline{A}_{11}}{\underline{A}_{22}}} = \sqrt{\dfrac{\underline{Z}_{1c}}{\underline{Z}_{2c}}}$ (3), $\sqrt{\underline{Z}_{1c}\underline{Z}_{2c}} = \sqrt{\dfrac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}}}$ (4).

Решая уравнения (1-4) относительно А-параметров, находим:

$$\underline{A}_{11} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{1c}}{\underline{Z}_{2c}}} ch\underline{g}, \qquad \underline{A}_{22} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{2c}}{\underline{Z}_{1c}}} ch\underline{g}, \qquad \underline{A}_{21} = \frac{1}{\sqrt{\underline{Z}_{1c}\underline{Z}_{2c}}} sh\underline{g},$$

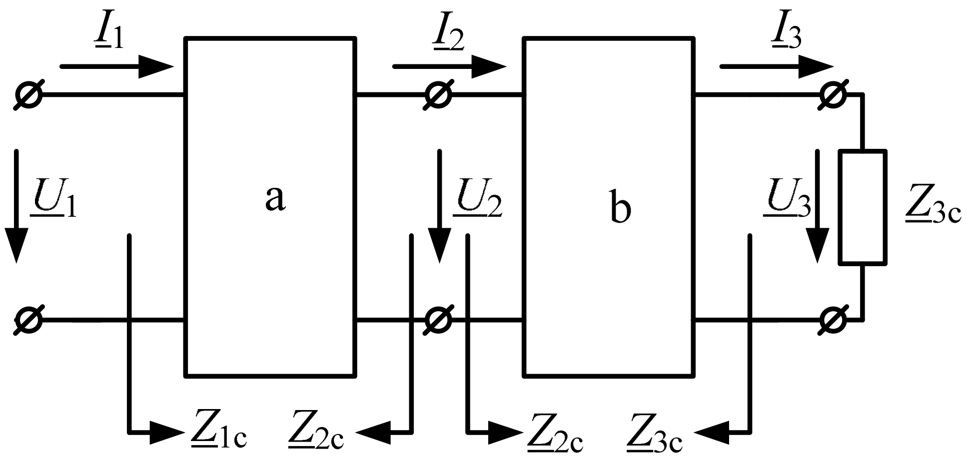
$$\underline{A}_{12} = \sqrt{\underline{Z}_{1c}\underline{Z}_{2c}} sh\underline{g}.$$

Уравнения для согласованного режима в гиперболической форме:

$$\underline{U}_1 = \underline{m}_T \underline{U}_2 e^{\underline{g}} = \underline{m}_T (\underline{U}_2 ch\underline{g} + \underline{U}_2 sh\underline{g}) = \underline{m}_T \left(\underline{U}_2 ch\underline{g} + \underline{I}_2 \underline{Z}_2 sh\underline{g}\right),$$

$$\underline{I}_1 = \frac{1}{\underline{m}_T} \underline{I}_2 e^{\underline{g}} = \frac{1}{\underline{m}_T} (\underline{I}_2 ch\underline{g} + \underline{I}_2 sh\underline{g}) = \frac{1}{\underline{m}_T} \left(\underline{I}_2 ch\underline{g} + \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_2} sh\underline{g}\right)$$

Каскадное соединение согласованных четырехполюсников



Для согласования:

$$\underline{Z}_H = \underline{Z}_{3c}, \underline{Z}_{\text{вх.б}} = \underline{Z}_{2c}, \underline{Z}_{вх.а} = \underline{Z}_{1c}$$

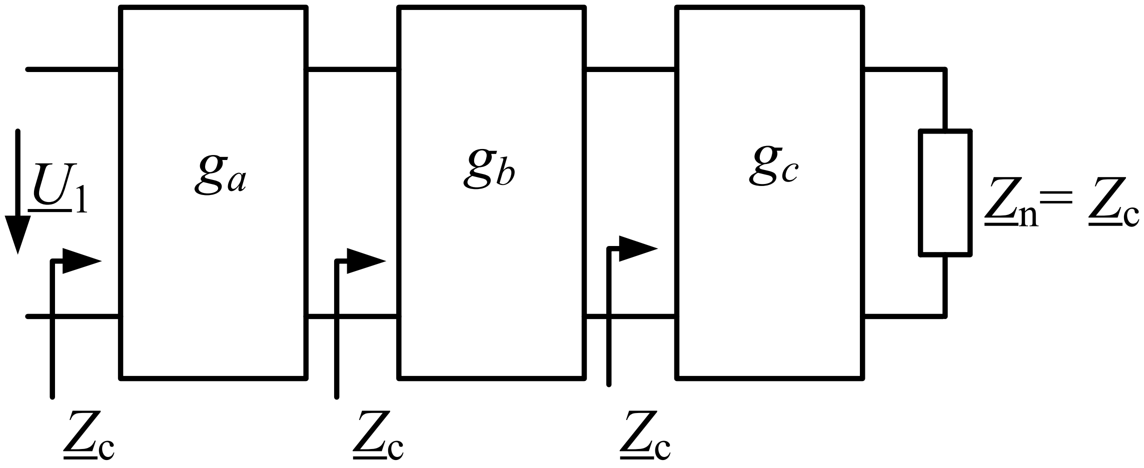
$$\underline{U}_1 = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{1c}}{\underline{Z}_{2c}}} e^{\underline{g}_a} \underline{U}_2, \;\; \underline{U}_1 = \underline{m}_{T_a} \underline{U}_2 e^{\underline{g}_a}$$

$$\underline{U}_2 = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{2c}}{\underline{Z}_{3c}}} e^{\underline{g}_б} \underline{U}_3, \underline{U}_2 = \underline{m}_{T_б} \underline{U}_3 e^{\underline{g}_б}$$

$$\underline{U}_1 = \underline{m}_{T_a} e^{\underline{g}_a} \underline{m}_{T_б} \underline{U}_3 e^{\underline{g}_б} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{1c}}{\underline{Z}_{2c}}} \sqrt{\frac{\underline{Z}_{2c}}{\underline{Z}_{3c}}} e^{\underline{g}_a + \underline{g}_б} \underline{U}_3 = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{1c}}{\underline{Z}_{3c}}} e^{\underline{g}_a + \underline{g}_б} \underline{U}_3.$$

При согласованном каскадном сопротивление результирующий четырехполюсник имеет характеристические сопротивления $\underline{Z}_{1c}$ и $\underline{Z}_{3c}$ и меру передачи $g_a + g_b$.

Симметричный четырехполюсник



$$\underline{Z}_{1c} = \underline{Z}_{2c} = \underline{Z}_c$$
$$g_э = g_a + g_b + g_c$$
$$\underline{m}_T = 1$$

Входное сопротивление всегда равно $\underline{Z}_c$.

Комплексные передаточные функции четырехполюсника

Комплексная функция по напряжения:

$$\underline{K}_U(j\omega) = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{A}_{11}\underline{U}_2 + \underline{A}_{12}\underline{I}_2} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{A}_{11}\underline{Z}_2 + \underline{A}_{12}}.$$

АЧХ по напряжению: $\left|K_U(j\omega)\right| = K_U(\omega) = \left|\dfrac{\underline{Z}_2}{\underline{A}_{11}\underline{Z}_2 + \underline{A}_{12}}\right|.$

ФЧХ: $\Psi_U(j\omega) = Arg\dfrac{\underline{Z}_2}{\underline{A}_{11}\underline{Z}_2 + \underline{A}_{12}}.$

Частный случай: $\underline{Z}_2 = \infty,\ K_{Uxx}(j\omega) = \dfrac{1}{\underline{A}_{11}}.$

Используется для проверки расчёта А.

Комплексная передаточная функция по току:

$$\underline{K}_I(j\omega)=\frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1}=\frac{\underline{I}_2}{\underline{A}_{21}\underline{U}_2+\underline{A}_{22}\underline{I}_2}=\frac{1}{\underline{A}_{21}\underline{Z}_2+\underline{A}_{22}}$$

Частный случай: $\underline{Z}_2=0;\ \underline{K}_{I\text{кз}}(j\omega)=\dfrac{1}{\underline{A}_{22}}.$