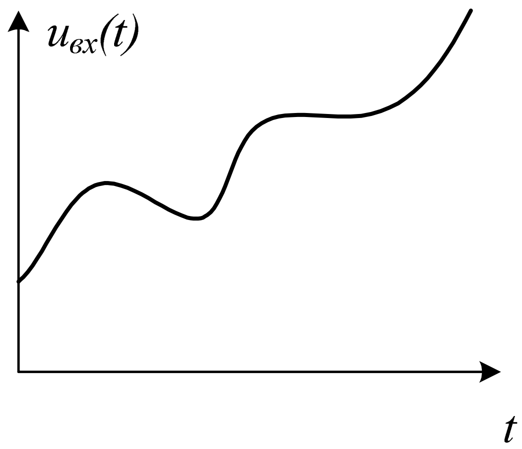
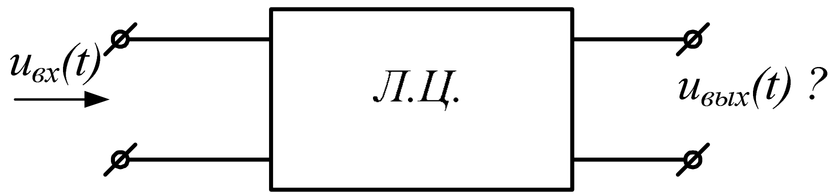
# ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ ДЮАМЕЛЯ К РАСЧЕТУ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ

Интегралы Дюамеля применяется для анализа воздействия на цепь напряжения произвольной формы.




В линейной цепи действует принцип наложения: реакция цепи на сумму входных воздействий равна сумме реакций на каждое воздействие в отдельности.

$$u_{вых}(t) = L\left\{\sum_{i=1}^{n} u_{вхi}(t)\right\} = \sum_{i=1}^{n} L\left\{u_{вхi}(t)\right\}.$$

Здесь $L$- линейное преобразование.

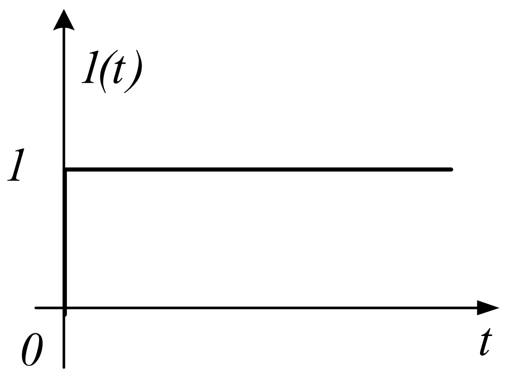
В интеграле Дюамеля сложное воздействие представляется в виде суммы простейших элементарных воздействий:

Элементарные воздействия:

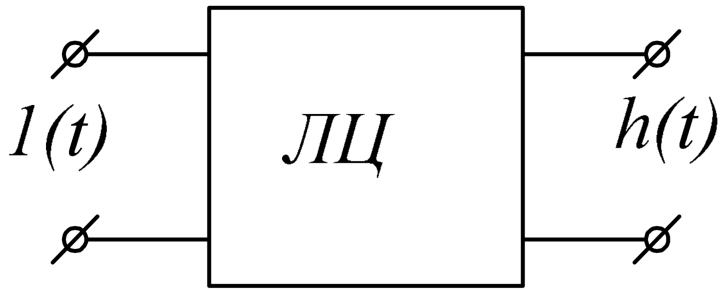
1. $1(t)$ - единичная функция.

2. $\delta(t)$ -импульсная функция.

## Единичная функция, переходная характеристика цепи

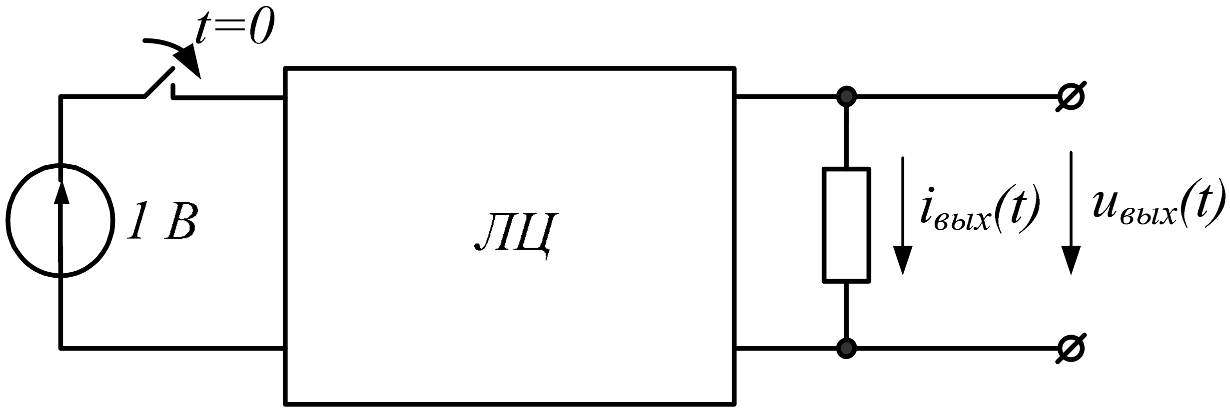



$$1(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$




Переходной характеристикой цепи $h(t)$ называют реакцию на выходе цепи при действии на входе единичной функции.

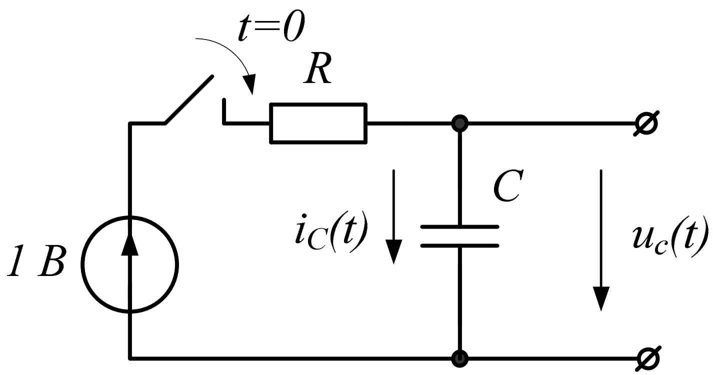
Для определения $h(t)$ рассчитывают переходной процесс при воздействии на вход единичной функции.



$i_{вых}(t) = h(t) = g(t)$ - переходная проводимость цепи, численно равная току на выходе при действии на входе единичной функции;

$u_{вых}(t) = h(t) = k(t)$ - переходная проводимость цепи, численно равная напряжению на выходе при действии на входе единичной функции.

Пример.

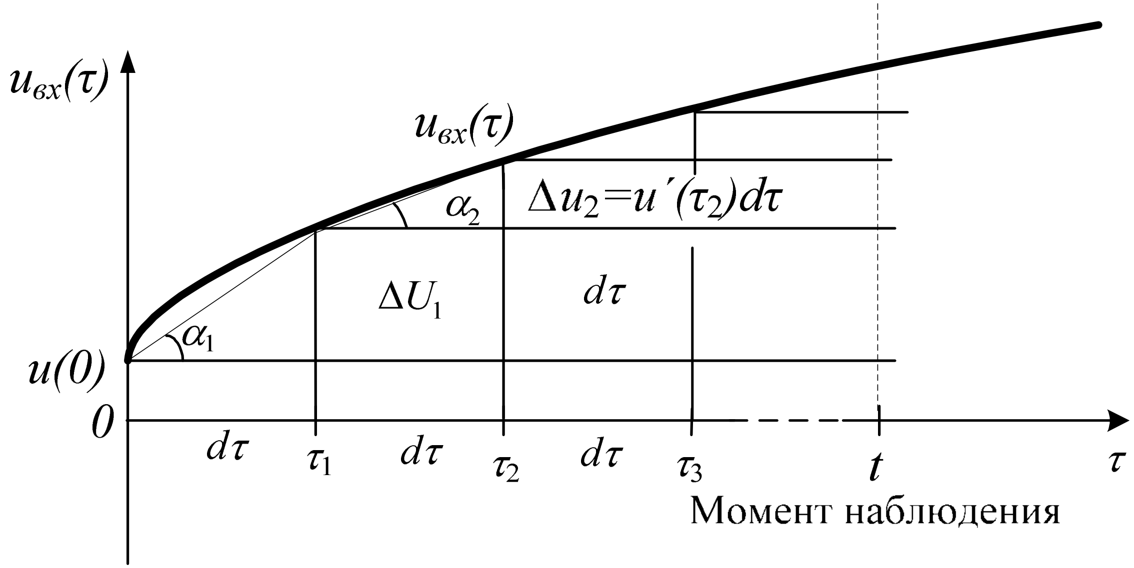



$$u_C(t) = 1\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = k(t);$$

$$i_C(t) = \frac{1}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} = g(t).$$

Зная $h(t)$ и $g(t)$, можно рассчитать реакцию на любое сложное воздействие.

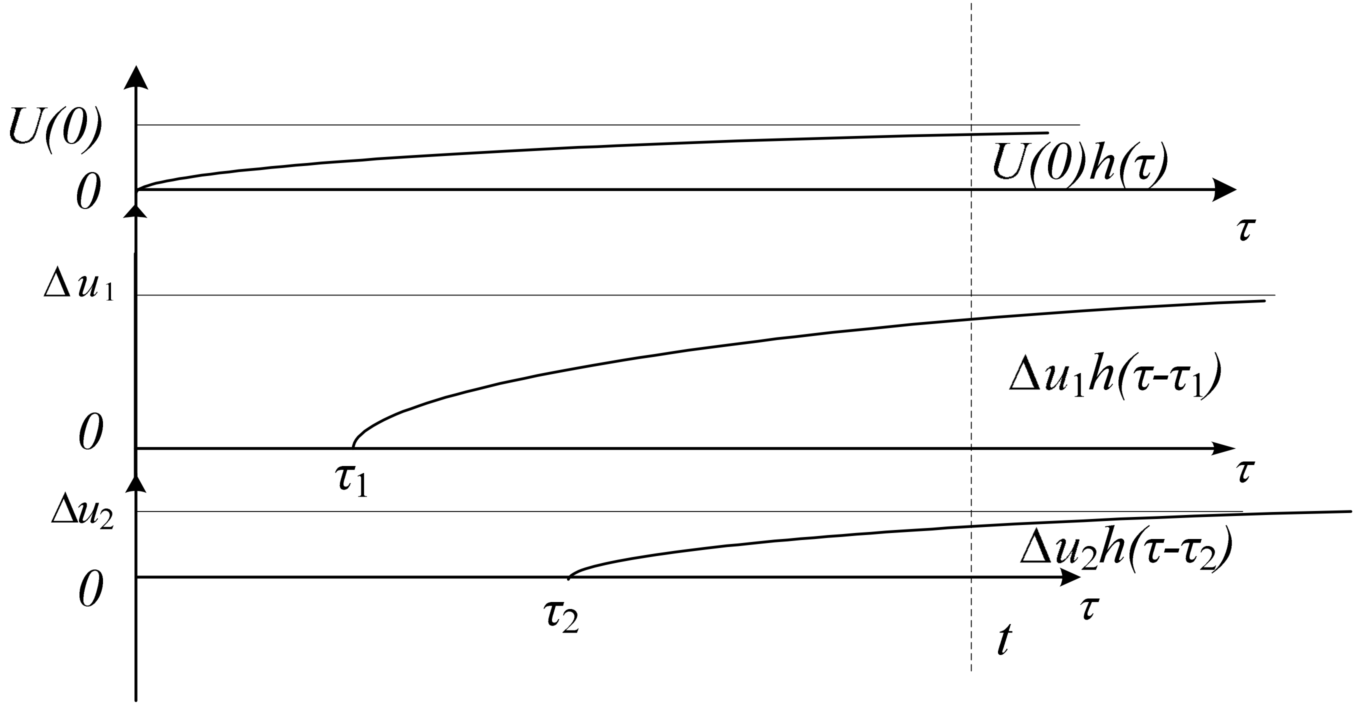
# Интеграл Дюамеля первого вида




Заменяем $u_{вх}(\tau)$ ступенчатой функцией. Для касательных: $tg\alpha_1 = u'_{вх}(\tau_1),\ tg\alpha_2 = u'_{вх}(\tau_2)$.

Величины ступенек: $\Delta u(\tau_i) \approx u'(\tau_i)d\tau$ .

Реакция на выходе: $u_{выхi}(t) = \Delta u(\tau_i) \cdot h(t - \tau_i)$ .




Реакция на выходе в момент наблюдения *t*:

$$u_{вых}(t) = U(0)h(t) + \sum_{i=1}^{n} \Delta u_i h(t-\tau_i) = U(0)h(t) + \sum_{i=1}^{n} u'(\tau_i)h(t-\tau_i)d\tau_i.$$

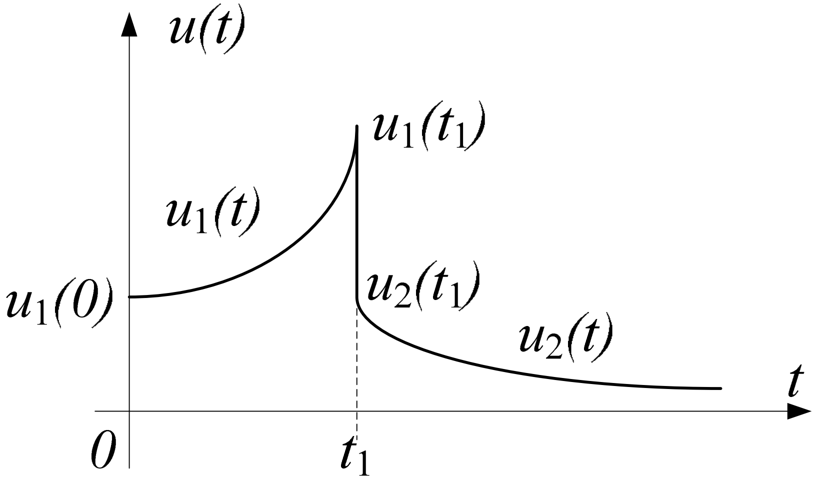
Пусть $d\tau \to 0$. Переходим к интегралу Дюамеля первого вида:

$$u_{вых}(t) = u(0)h(t) + \int\limits_0^t u'(\tau)h(t-\tau)d\tau .$$

Интеграл Дюамеля. I-го вида выражает реакцию на выходе цепи через переходную характеристику цепи $h(t)$.

<u>Правило:</u> В интеграле Дюамеля I-го вида скачок входной функции в момент $t = t_i$ учитывается слагаемым вида $\Delta u\, h(t - t_i)$. Плавные изменения функции учитываются интегралом $\int\limits_a^b u'(t)h(t-\tau)d\tau$, где нижний предел $a$– начало действия функции, а верхний предел $b$ – момент наблюдения или конец действия функции.

Пример.




Интеграл Дюамеля надо записывать отдельно для каждого интервала изменения функции.

1. На первом интервале $0 < t < t_1$:

$$u_{вых}(t) = u_1(0)h(t) + \int_0^t u_1'(\tau)h(t-\tau)d\tau.$$

2. На втором интервале $t_1 < t < \infty$:

$$u_{вых}(t)=u_1(0)h(t)+\int_0^{t_1}u_1'(\tau)h(t-\tau)d\tau+\left[u_2(t_1)-u_1(t_1)\right]h(t-t_1)+$$

$$+\int_{t_1}^{t}u_2'(\tau)h(t-\tau)d\tau.$$

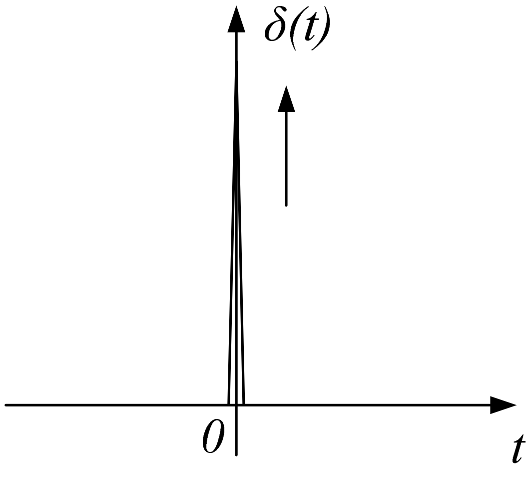
Вторая форма записи интеграла Дюамеля I–го вида

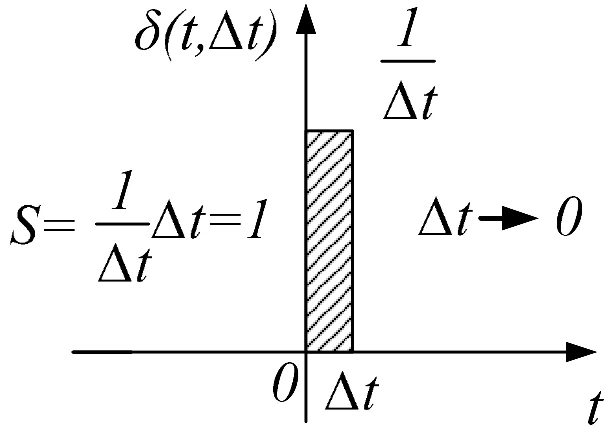
$$u_{вых}(t)=u(t)h(0)+\int_0^{t}u(\tau)h'(t-\tau)d\tau.$$

## Импульсная функция, импульсная характеристика цепи

Импульсной функцией (дельта-функцией, функцией Дирака) называется функция $\delta(t)$, обладающая свойствами:

1. $\delta(t)=0$, когда $t \neq 0 \quad (t<0,\ t>0)$.
2. $\delta(0)=\infty$, когда $t=0$.
3. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt=1$.



$\delta(t)$- функция это импульс бесконечно малой длительности и бесконечно большой амплитуды. Площадь импульса постоянна и равна 1.

Односторонняя дельта функция $\delta(t,\Delta t) \to \delta(t)$ при $t \to 0$.

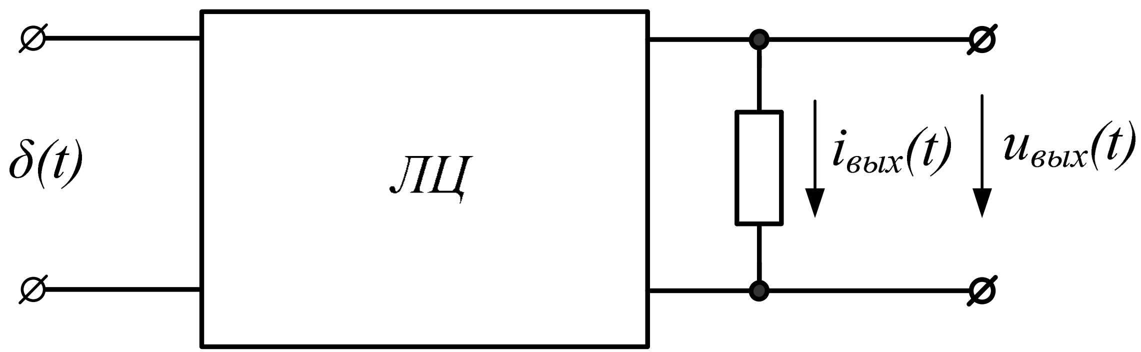
Найдем интеграл от $\delta(t)$: $1(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} \delta(t)dt$.

Следовательно: $\delta(t) = \dfrac{d}{dt}(1(t))$.

Фильтрующее свойство $\delta(t)$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = f(t).$$

## Расчет импульсной характеристики




Импульсной характеристикой цепи $h_\delta(t)$ называют реакцию на выходе цепи при действии на входе $\delta(t)$.

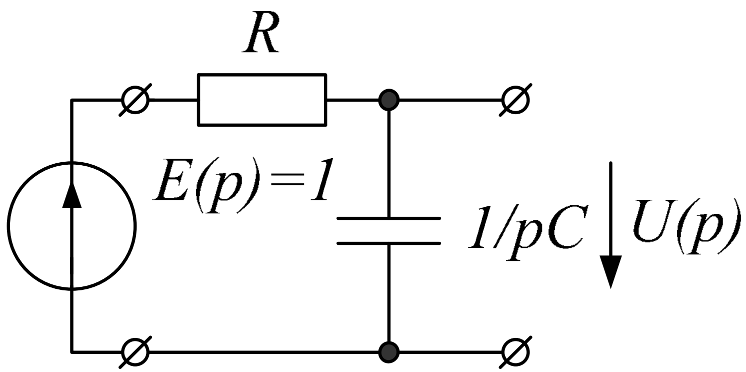
Импульсная проводимость численно равна току на выходе $i_{вых}(t)=h_\delta(t)=g_\delta(t)$ [см/с]

Импульсная функция по напряжению $u_{вых}(t)=h_\delta(t)=k_\delta(t)$ [1/с].

Найдем изображение $\delta(t)$:

$$F(p)=\int_0^{\infty}\delta(t)e^{-pt}dt=e^{-p\cdot 0}\int_0^{+\infty}\delta(t)dt=1.$$

Операторный метод расчета $h_\delta(t)$




$$U(p)=\frac{1\cdot\dfrac{1}{pC}}{R+\dfrac{1}{pC}}=\frac{1}{1+RCp}=$$

$$=\frac{1}{RC}\cdot\frac{1}{p+\dfrac{1}{RC}}\doteqdot\frac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}=h_\delta(t).$$

Расчет по переходной характеристике

Запишем интеграл Дюамеля I-го вида (вторая форма записи):

$$u_{вых}(t) = u(t)h(0) + \int_0^t u(\tau)h'(t-\tau)d\tau$$

Пусть $u(t) = \delta(t)$.

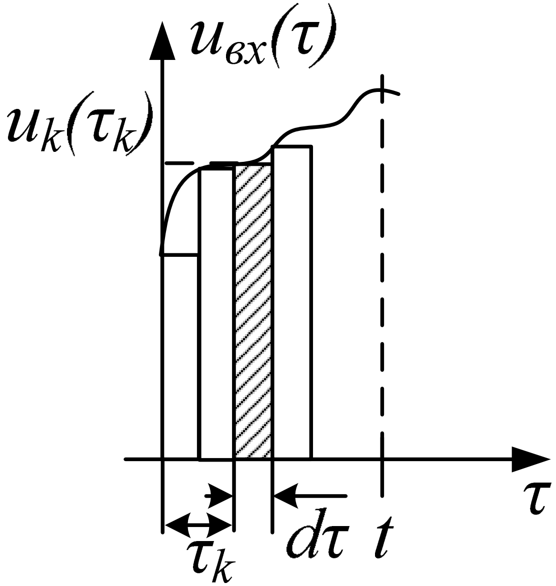
$$u_{вых}(t) = \delta(t)h(0) + \int_0^t \delta(\tau)h'(t-\tau)d\tau =$$

$$= h(0)\delta(t) + h'(t) = h_\delta(t).$$

**Интеграл Дюамеля второго вида**

Интеграл Дюамеля второго вида выражает реакцию на выходе цепи с помощью импульсной характеристики цепи.

Заменим входной сигнал последовательностью импульсов длительностью $\tau$. Каждый импульс можно представить разностью двух функций включения:



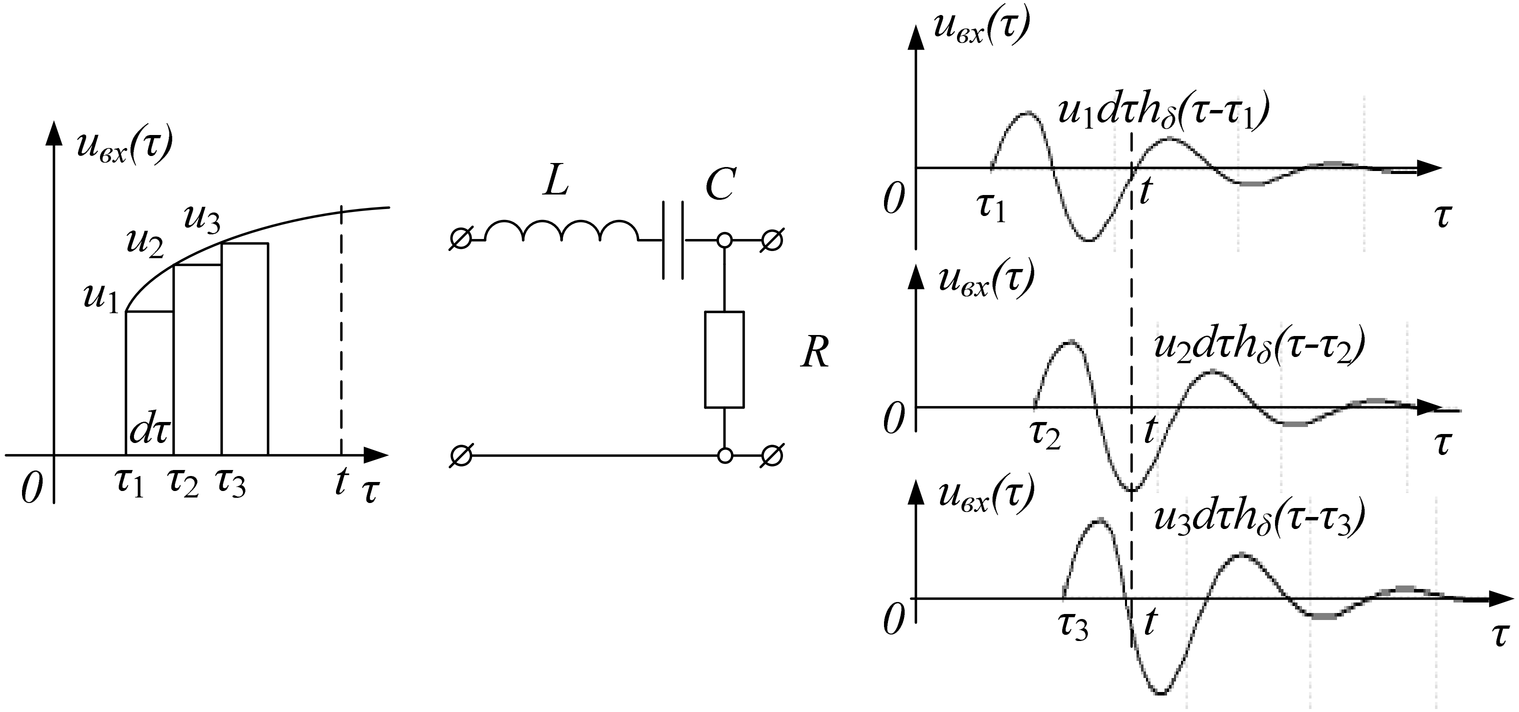

$$u_k\left(\tau_k\right)=u_k\left[1\left(\tau-\tau_k\right)-1\left(\tau-\tau_k-d\tau\right)\right].$$

Умножим и разделим на $d\tau$:

$$u_k\left(\tau_k\right)=d\tau\frac{u_k\left[1\left(\tau-\tau_k\right)-1\left(\tau-\tau_k-d\tau\right)\right]}{d\tau}=u_k d\tau\delta\left(\tau-\tau_k\right).$$

Функция $\delta\left(\tau-\tau_k\right)$ вызовет на выходе реакцию $h_\delta\left(\tau-\tau_k\right)$.

Функция $u_k d\tau\delta\left(\tau-\tau_k\right)$ вызовет на выходе реакцию $u_k d\tau h_\delta\left(\tau-\tau_k\right)$.



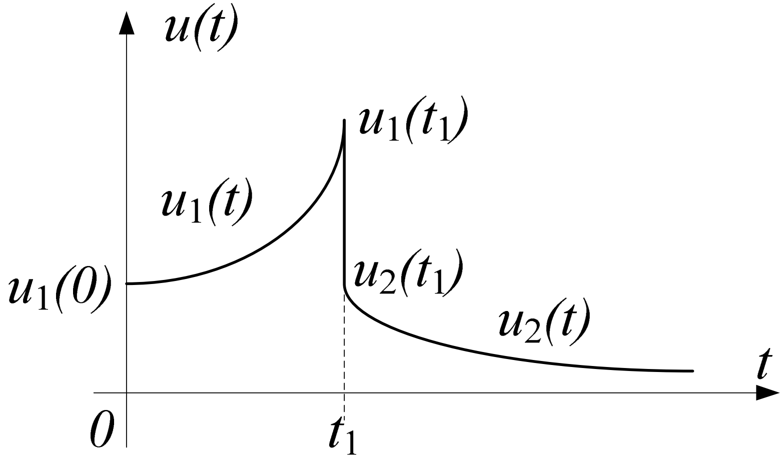

В момент наблюдения *t*: $u_{вых}\left(t\right)=\sum_{k=1}^{n}u_k\left(\tau_k\right)h_\delta\left(t-\tau_k\right)d\tau$.

Переходим к интегралу при $d\tau\to 0$ :

$$u_{вых}(t) = \int_0^t u(\tau) h_\delta(t-\tau)\, d\tau = \int_0^t u(t-\tau) h_\delta(\tau)\, d\tau .$$

Получили интеграл Дюамеля второго вида (интеграл наложения, свертка функций). Выражает реакцию на выходе с помощью импульсной характеристики цепи.

Пример.




Входной сигнал разбиваем на два интервала.

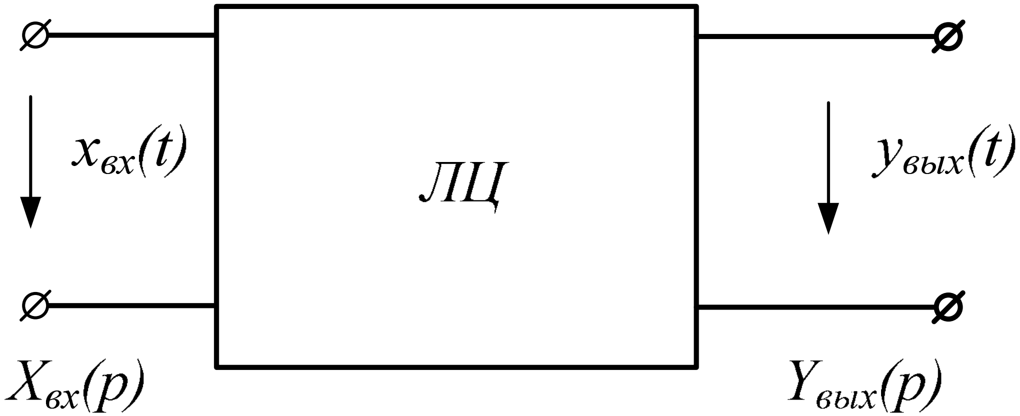
1. На первом интервале $0 < t < t_1$:

$$u_{вых}(t)=\int_{0}^{t}u_1(\tau)h_\delta(t-\tau)d\tau.$$

2. На втором интервале $t_1 < t < \infty$:

$$u_{вых}(t)=\int_{0}^{t_1}u_1(\tau)h_\delta(t-\tau)d\tau+\int_{t_1}^{t}u_2(\tau)h_\delta(t-\tau)d\tau.$$

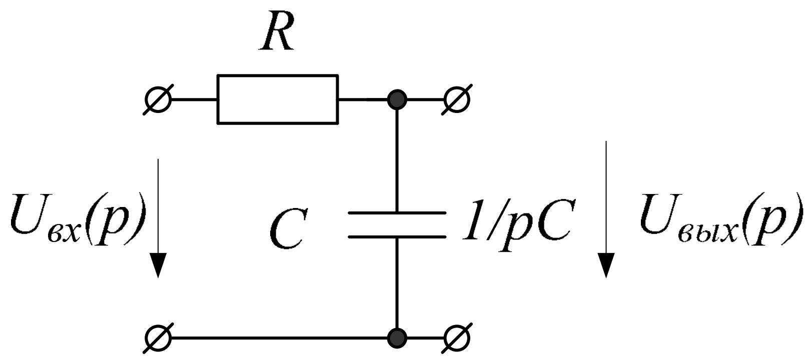
# ПЕРЕДАТОЧНАЯ ФУНКЦИЯ ЛИНЕЙНОЙ ЦЕПИ




$$K(p) = \frac{Y_{вых}(p)}{X_{вх}(p)}$$

Передаточной функцией цепи называется отношение операторного изображения выходной величины к операторному изображению входной величины.

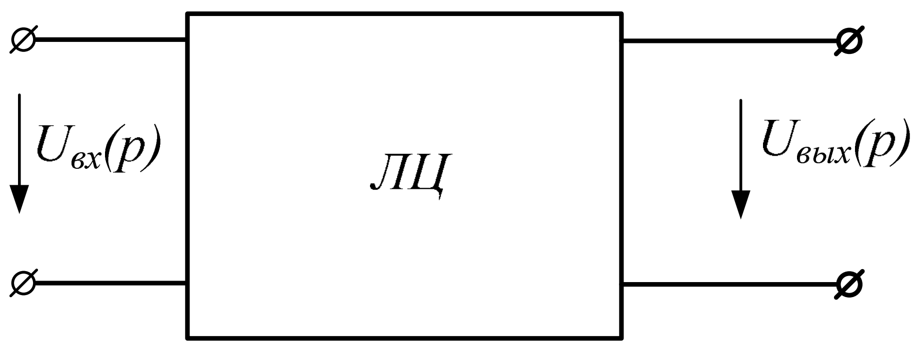
Пример




$$K(p)=\frac{U_{вых}(p)}{U_{вх}(p)}=$$

$$=\frac{U_{вх}(p)\cdot\dfrac{1}{pC}}{U_{вх}(p)\left(R+\dfrac{1}{pC}\right)}=\frac{1}{1+RCp}.$$

Связь передаточной функции и импульсной характеристики цепи




$$U_{вых}(p)=K(p)\cdot U_{вх}(p)$$

Пусть $u_{вх}(t) = \delta(t) \doteqdot 1$. Тогда $U_{вых}(p) = K(p) \cdot 1 \doteqdot h_{\delta}(t)$.

Следовательно: $h_{\delta}(t) \doteqdot K(p)$.

Импульсная характеристика и передаточная функция связаны преобразованием Лапласа.

Связь передаточной функции и переходной характеристики цепи

Пусть $u_{вх}(t) = 1(t) \doteqdot \dfrac{1}{p}$. Тогда $U_{вых}(p) = K(p) \cdot \dfrac{1}{p} \doteqdot h(t)$.

Следовательно: $h(t) \doteqdot \dfrac{K(p)}{p}$.

Эти формулы можно применять для расчета импульсной и переходной характеристики.