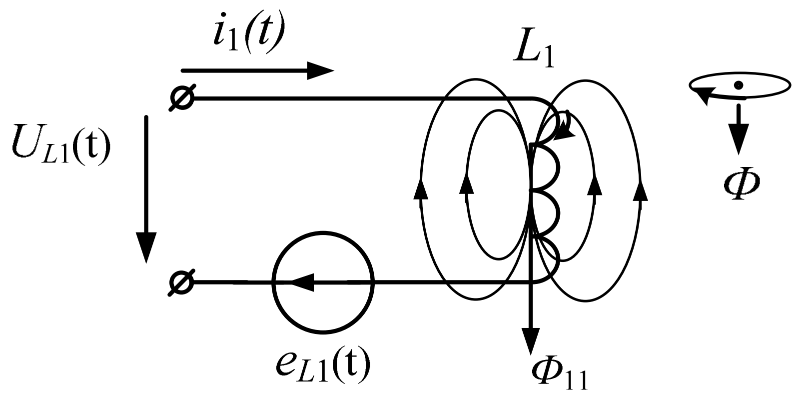
ЦЕПИ С ВЗАИМНОЙ ИНДУКЦИЕЙ

Определение взаимной индукции и взаимной индуктивности



В катушке с током i_1 возникает магнитный поток самоиндукции Φ_{11} [Вб]. Направление определяем по правилу буравчика. Число витков катушки N_1.

Потокосцепление самоиндукции $\psi_{11} = N_1 \cdot \Phi_{11}$.

Если $i(t) = var$, то по закону электромагнитной индукции (Закон Фарадея) возникает ЭДС самоиндукции $e_L\left(t\right) = -\dfrac{d\psi_{11}\left(t\right)}{dt} = -L_1\dfrac{di_1}{dt}$.

Если ток уменьшается ($\frac{di_1}{dt} < 0$), то $-L_1 \frac{di_1}{dt} > 0$ и $e_L(t) > 0$.

ЭДС самоиндукции препятствует изменению тока в катушке, направлена согласно с ним и поддерживает ток в катушке.

Напряжение на катушке:

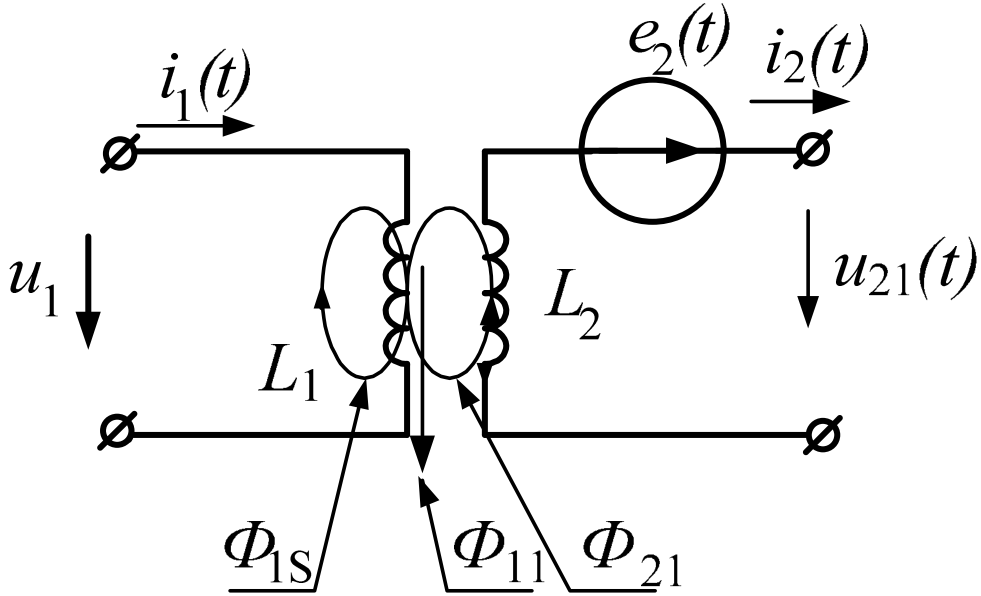
$$u_L(t) = -e_L(t) = \frac{d\psi_{11}}{dt} = L_1 \frac{di_1}{dt}.$$

Коэффициент пропорциональности между потокосцеплением и током называется индуктивность: $L_1 = \frac{\psi_{11}}{i_1}$[Гн].

Взаимная индукция

Две катушки с количеством витков N_1, N_2 имеют индуктивности L_1 и L_2.

Пусть $i_1 \neq 0, i_2 = 0$.



Тогда $\Phi_{11} = \Phi_{1S} + \Phi_{21}$.

Φ_{11}- полный магнитный поток первой катушки;

Φ_{1S}-поток рассеяния;

Φ_{21} -поток взаимной индукции, вызываемый током первой катушки и пронизывающий вторую катушку.

Рассмотрим потокосцепление:

$\psi_{11} = N_1 \Phi_{11} = L_1 i_1$ -потокосцепление первой катушки;

$\psi_{1S} = N_1 \Phi_{1S} = L_{1S} i_1$ - потокосцепление рассеяния 1ой катушки;

$\psi_{21} = N_2 \Phi_{21} = M_{21} i_1$ - потокосцепление взаимной индукции со второй катушкой, вызванное током первой катушки.

$M_{21} = \dfrac{\psi_{21}}{i_1}$ - взаимная индуктивность.

Взаимная индуктивность 1 - ой и 2 - ой катушек M_{21} является коэффициентом пропорциональности между потокосцеплением взаимной индукции второй катушки и током первой катушки.

Пусть $\psi_{21}(t) = var$.

Тогда во второй катушке возникает ЭДС взаимной индукции:

$$e_2(t) = -\frac{d\psi_{21}}{dt} = -M_{21}\frac{di_1}{dt}.$$

ЭДС взаимной индукции препятствует изменению потокосцепления. Если $\frac{d\psi_{21}}{dt} = M_{21}\frac{di_1}{dt} < 0$, то $e_2(t) > 0, i_2(t) > 0$.

ЭДС взаимной индукции поддерживает постоянство потокосцепления взаимной индукции $\psi_{21} = const$.

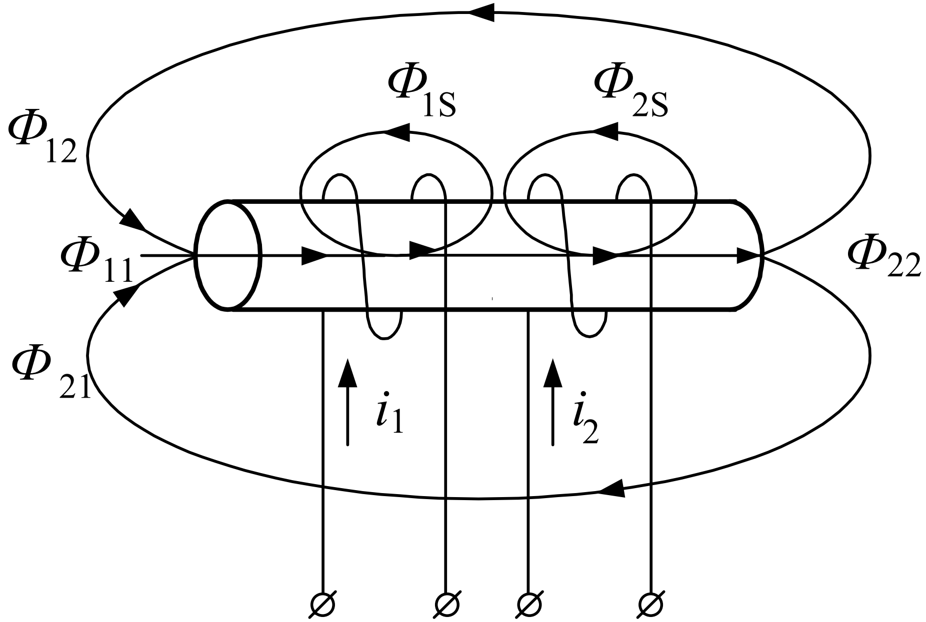
Рассмотрим второй случай $i_1 = 0; i_2 \neq 0$.

При этом: $\Phi_{22} = \Phi_{2S} + \Phi_{21}$, $\psi_{22} = \psi_{2S} + \psi_{21}$, $\psi_{2S} = N_2\Phi_{2S}$, $\psi_{12} = N_1\Phi_{12} = M_{12}i_2$,

где: $M_{12} = \frac{\psi_{12}}{i_2}$.

В линейных цепях по принципу обратимости: $M_{21} = M_{12} = M$.

Согласное и встречное включение катушек



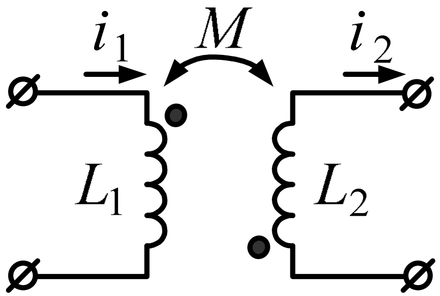
$$\Phi_{11} = \Phi_{1S} + \Phi_{21},$$
$$\Phi_{22} = \Phi_{2S} + \Phi_{12}.$$

Определение:

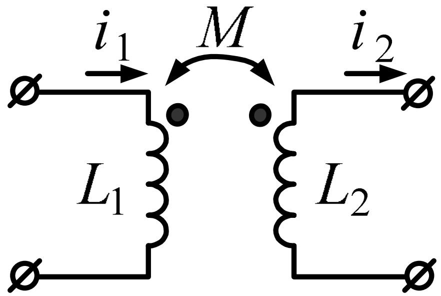
Согласным называется включение катушек, при котором совпадает магнитный поток самоиндукции и взаимной индукции.

Встречным включением называется включение, при котором магнитные потоки самоиндукции и взаимной индукции не совпадают.

Для согласного включения токи должны быть одинаково направлены относительно одноимённых зажимов. Одноимённые зажимы обозначены на схеме одинаковыми значками.



Согласное включение

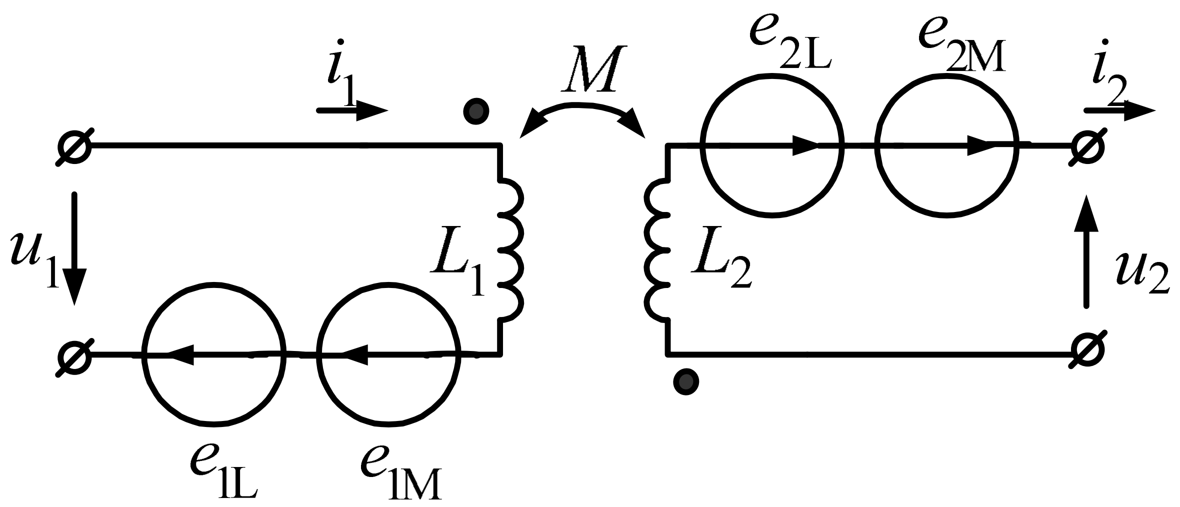


Встречное включение

При согласованном включении ЭДС самоиндукции и взаимной индукции складываются.

$$e_1 = e_{1L} + e_{1M} = -\frac{d\psi_{11}}{dt} - \frac{d\psi_{12}}{dt} = -\left(L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \right)$$

$$e_2 = e_{2L} + e_{2M} = -\left(L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \right)$$



При встречном включении ЭДС самоиндукции и взаимной индукции вычитаются:

$$e_1 = e_{1L} - e_M = -\left(L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} \right),$$

$$e_2 = e_{2L} - e_M = -\left(L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt} \right).$$

Напряжения на катушках по направлению и знаку противоположны ЭДС

$$u_1(t) = -e_1(t) = L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt};$$

$$u_2(t) = -e_2(t) = L_2 \frac{di_2}{dt} \pm M \frac{di_1}{dt}.$$

Знак (+) соответствует согласному включению, знак (-) – встречному.

Комплексное сопротивление взаимной индуктивности

Пусть

$$i_1(t) = I_{m1}\, sin(\omega t + \psi_1)$$

$$i_2(t) = I_{m2}\, sin(\omega t + \psi_2).$$

Переходим к комплексным функциям времени:

$$\tilde{i}_1(t) = \underline{I}_{m1} e^{j\omega t}$$

$$\tilde{i}_2(t) = \underline{I}_{m2} e^{j\omega t}$$

$$\underline{U}_m e^{j\omega t} = j\omega L_1 \underline{I}_{m1} e^{j\omega t} \pm j\omega M\, \underline{I}_{m2} e^{j\omega t}$$

Для комплексных амплитуд:

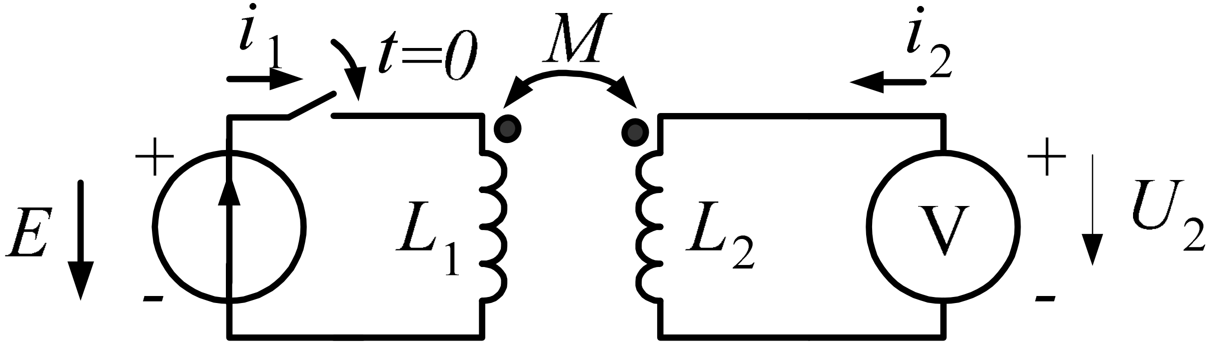
$$\underline{U}_{m1} = j\omega L_1 \underline{I}_{m1} \pm j\omega M \underline{I}_{m2}$$

$$\underline{U}_{m2} = j\omega L_2 \underline{I}_{m2} \pm j\omega M \underline{I}_{m1}$$

Здесь: $\omega M = X_m$ - сопротивление взаимной индукции;

$\underline{Z}_m = j\omega M$ - комплексное сопротивление взаимной индукции.

Экспериментальное определение одноимённых зажимов



$$R_V = \infty, i_2 = 0.$$

При согласном включении:

$$u_2 = L\frac{di_2}{dt} + M\frac{di_1}{dt}$$

Если $\dfrac{di_1}{dt} > 0$, то $u_2 > 0$.

Если при подключении постоянной ЭДС к первой катушке, напряжение на зажимах второй катушки положительно, то зажимы, к которым подключён плюсом источник напряжения и плюсом вольтметр, является одноимёнными.

Коэффициент взаимной связи

$$k = \frac{\omega M}{\sqrt{\omega L_1 \omega L_2}} = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$$

$$0 < k < 1.$$

Если две катушки одинаковы $L_1 = L_2 = L,$ то

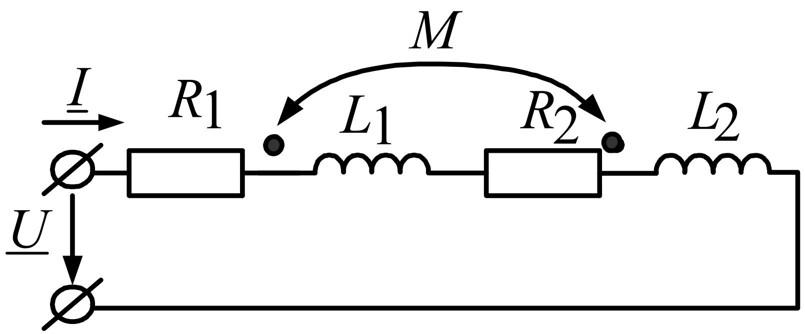
$$k = \frac{M}{L} = \frac{\psi_{21}}{i_1}\frac{i_1}{\psi_{11}} = \frac{\psi_{21}}{\psi_{11}} < 1, \text{ так как } \psi_{11} = \psi_{1S} + \psi_{21} > \psi_{21}.$$

$k = 0,$ если $\Phi_{21} = 0$ - катушки не связаны.

$k = 1,$ если $\Phi_{11} = \Phi_{21}$ – поток рассеяния отсутствует.

Последовательное соединение магнитно-связанных катушек

Согласное включение



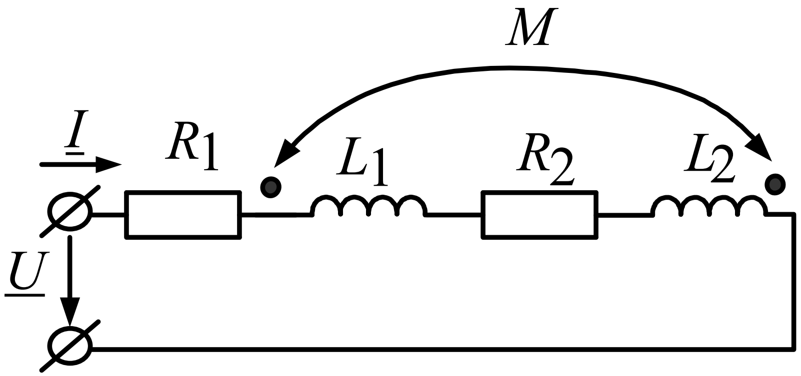
M – взаимная индуктивность;
$j\omega M$ – сопротивление взаимной индуктивности.

$$\underline{U} = \underline{I}R_1 + j\omega L_1 \underline{I} + j\omega M \underline{I} + \underline{I}R_2 + j\omega L_2 \underline{I} + j\omega M \underline{I} =$$
$$= \underline{I}\left(R_1 + R_2\right) + j\omega\left(L_1 + L_2 + 2M\right)\underline{I}.$$

Эквивалентная индуктивность при согласном включении:

$$L_{экв.согл.} = L_1 + L_2 + 2M\,.$$

Встречное включение



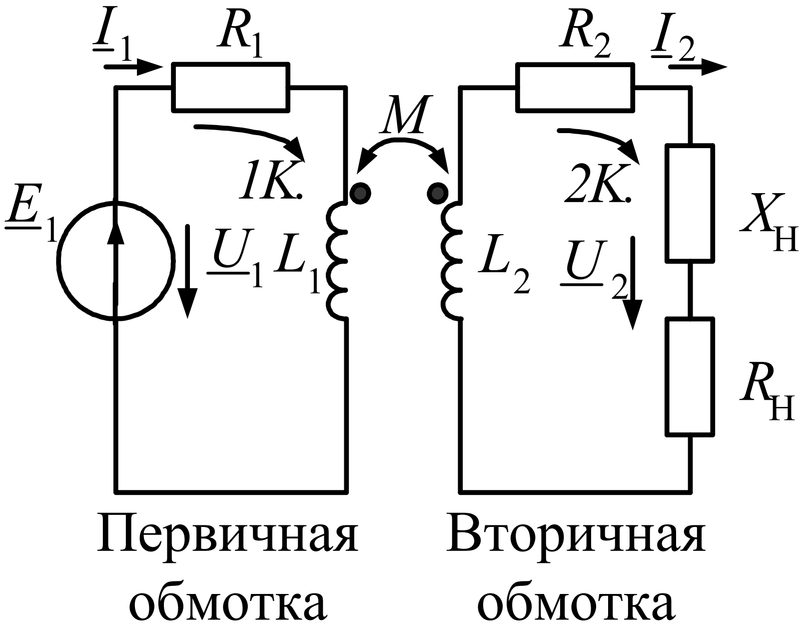
$$\underline{U} = \underline{I}R_1 + j\omega L_1\underline{I} - j\omega M\underline{I} + \underline{I}R_2 + j\omega L_2\underline{I} - j\omega M\underline{I}.$$

Эквивалентная индуктивность при встречном включении:

$$L_{экв.встр.} = L_1 + L_2 - 2M.$$

Линейный трансформатор

Трансформатором называется устройство для передачи энергии из одной части цепи в другую посредством электромагнитной индукции.



В схеме токи направлены встречно. Сопротивление нагрузки: $\underline{Z}_H = R_H + jX_H$.

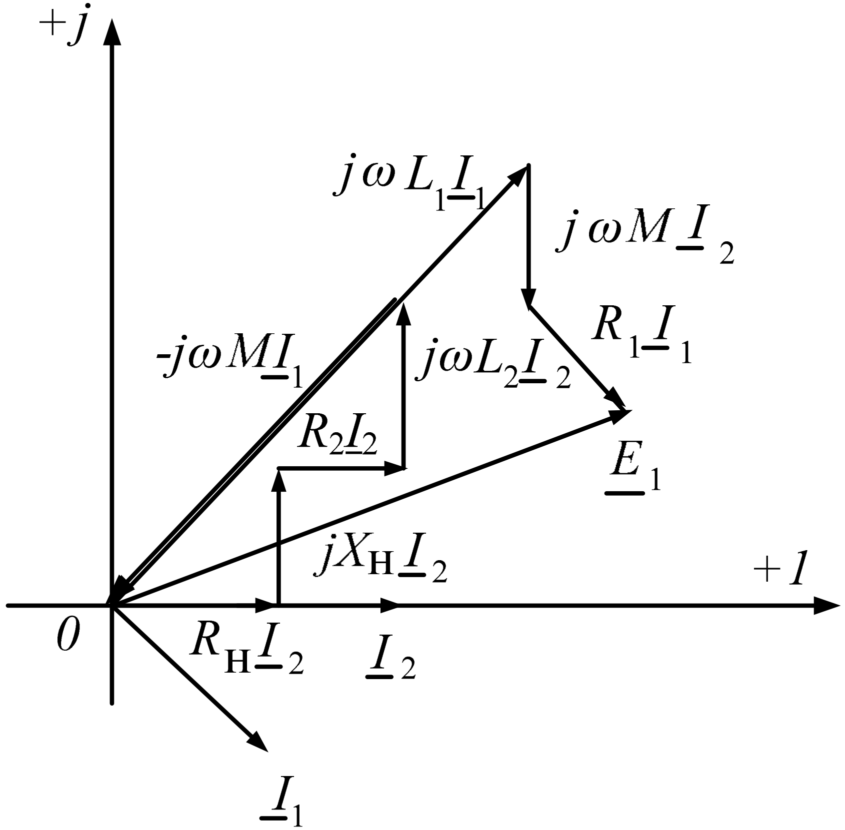
Составляем уравнения по второму закону Кирхгофа:

1. Для 1-ой обмотки: $\underline{I}_1 R_1 + j\omega L_1 \underline{I}_1 - j\omega M \underline{I}_2 = \underline{E}_1$.

2.Для 2-ой обмотки:

$$\underline{I}_2 R_2 + \underline{I}_2 R_H + jX_H \underline{I}_2 + j\omega L_2 \underline{I}_2 - j\omega M \underline{I}_1 = 0.$$

Векторная диаграмма токов и напряжений трансформатора



1. Задаемся током $\underline{I}_2$.

2. Строим $R_H \underline{I}_2,\ jX_H I_2 \left(x_H = \omega L\right); \underline{I}_2 R_2;\ j\omega L_2 \underline{I}_2; -j\omega M \underline{I}_1$.

Сумма векторов напряжений равна 0.

3.Найдем $\underline{I}_1 = \dfrac{-j\omega M \underline{I}_1}{-j\omega M} = \left(\dfrac{-j\omega M I_1}{\omega M}\right) e^{+j90^0}$. (Вектор $-j\omega M \underline{I}_1$ надо повернуть на +90° и изменить масштаб).

4. Строим $j\omega L_1 \underline{I}_1, -j\omega M \underline{I}_2, \underline{I}_1 R_1, \underline{E}_2$.

Коэффициенты трансформации

По напряжению: $\underline{n}_U = \dfrac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1}$.

По току: $\underline{n}_I = \dfrac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2}$.

По сопротивлению: $\underline{n}_Z = \dfrac{\underline{Z}_{2H}}{\underline{Z}_{вх}} = \dfrac{\underline{U}_2 \underline{I}_1}{\underline{I}_2 \underline{U}_1} = \underline{n}_U \underline{n}_I$.

Согласующие свойства трансформатора

$$\underline{Z}_{ВХ} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \frac{\underline{U}_2}{n \cdot n\underline{I}_2} = \frac{\underline{Z}_H}{n^2}$$

Трансформатор используют для согласования сопротивлений.

Пусть $R_H = 4\,Ом$, $R_{ВХ} = 10\,кОм = R_{ГЕН}$.

$$n^2 = \frac{\underline{Z}_н}{\underline{Z}_{вх}} \frac{4}{10 \cdot 10^3} = 4 \cdot 10^{-4},\ n = 2 \cdot 10^{-2} = \frac{U_2}{U_1} = \frac{1}{50}.$$

Идеальный трансформатор

Идеальным трансформатором называют трансформатор без потерь, у которого: $k = 1$ и $L_1, L_2 \to \infty$.

В идеальном трансфоматоре *n* – действительное число, $\underline{U}_1 = \frac{1}{n}\underline{U}_2$, $\underline{I}_1 = n\underline{I}_2$ - совпадают по фазе.

$$\tilde{S}_1 = \underline{U}_1 \underline{I}_1^* = \frac{1}{n}\underline{U}_2 \cdot n\underline{I}_2^* = \tilde{S}_2.$$

КПД идеального трансформатора равен 1.

Схема замещения воздушного трансформатора

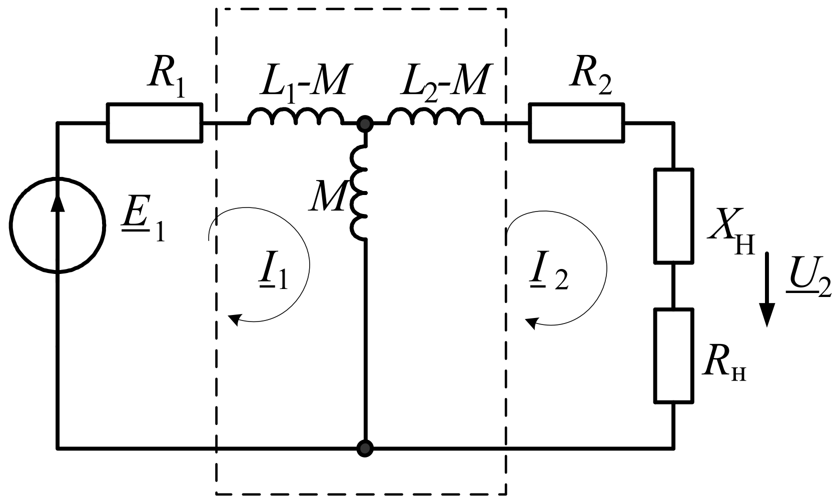
Для трансформатора были получены уравнения:

$$\begin{cases} \underline{I}_1 R_1 + j\omega L_1 \underline{I}_1 - j\omega M \underline{I}_2 = \underline{E}_1 \\ \underline{I}_2 R_2 + \underline{I}_2 R_H + jX_H \underline{I}_2 + j\omega L_2 \underline{I}_2 - j\omega M \underline{I}_1 = 0 \end{cases}$$

Перепишем уравнения трансформатора в виде:

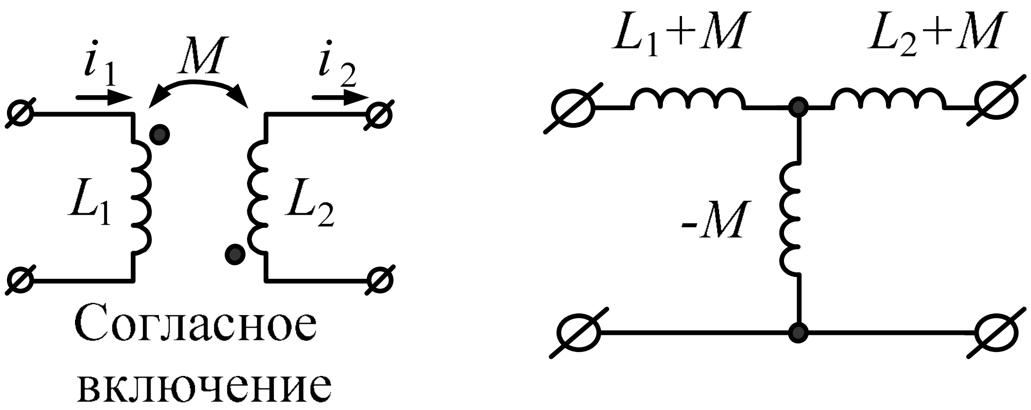
$$\begin{cases} \left[R_1 + j\omega\left(L_1 - M\right) + j\omega M\right]\underline{I}_1 - j\omega M\,\underline{I}_2 = \underline{E}_1 \\ -j\omega M\,\underline{I}_1 + \left[R_2 + R_н + jX_п + j\omega\left(L_2 - M\right) + j\omega M\right]\underline{I}_2 = 0 \end{cases}$$

Этим уравнениям соответствует схема:



Получили схему замещения трансформатора при встречном включении катушек. В схеме отсутствует магнитная связь. Контуры связанны электрически через сопротивление общей ветви $j\omega M$.

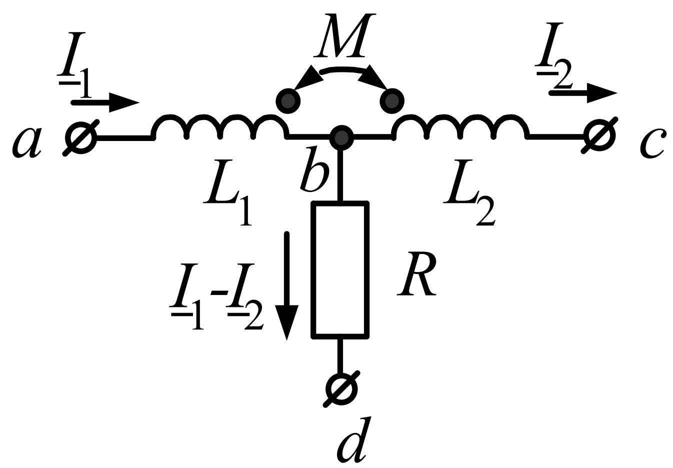
Если в трансформаторе включение катушек согласное, то схема замещения имеет вид:



Схемы замещения имеют расчетные значения и позволяют упростить расчёт цепей взаимной индуктивности.

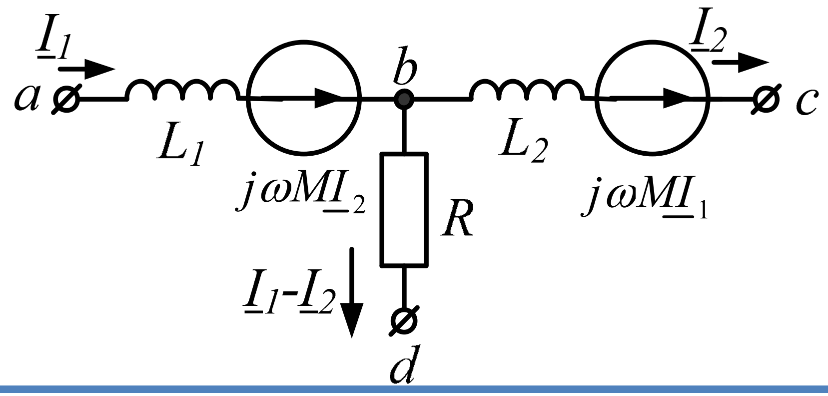
Развязка магнитно-связанных цепей

Развязкой называется замена магнитно-связанных цепей эквивалентными цепями без магнитных связей.



К узлу подключены одноимённые зажимы.

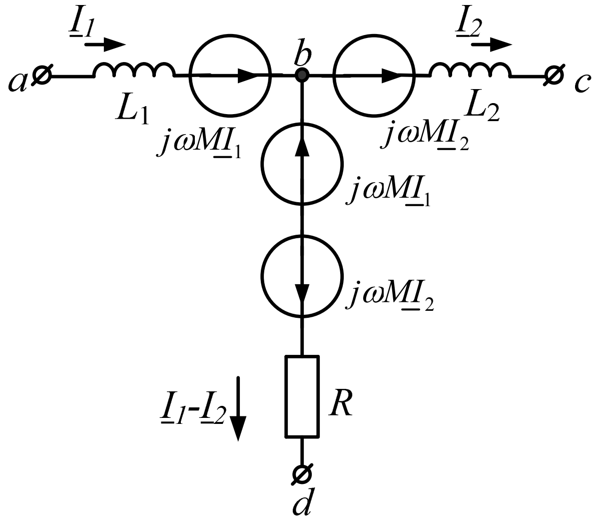
Для учёта магнитной связи введем наводимые напряжения взаимной индукции.

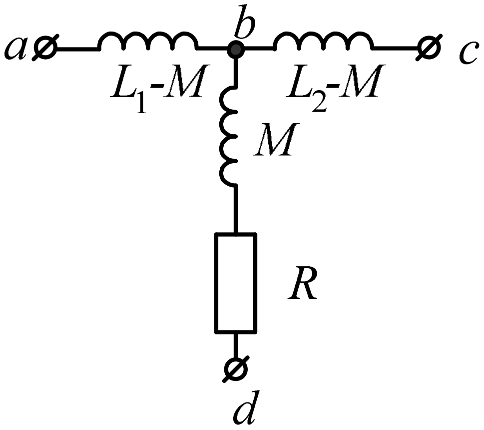


$$\underline{U}_{ав} = j\omega L_1 \underline{I}_1 - j\omega M\,\underline{I}_2$$

$$\underline{U}_{вс} = j\omega L_2 \underline{I}_2 - j\omega M\,\underline{I}_1$$

Переносим ЭДС взаимной индукции через узел:





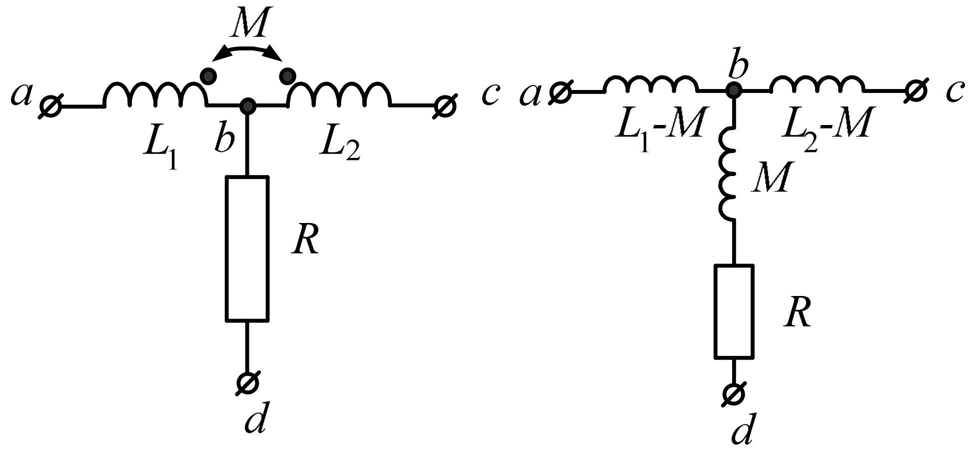
$$\underline{U}_{ав} = j\omega L_1 \underline{I}_1 - j\omega M \underline{I}_1$$

$$\underline{U}_{вс} = j\omega L_2 \underline{I}_2 - j\omega M \underline{I}_2$$

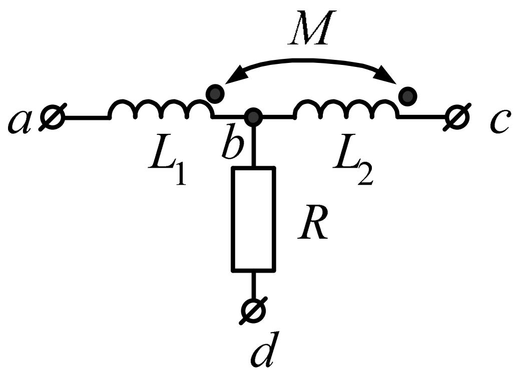
Заменяем в верхних и нижних ветвях ЭДС эквивалентными индуктивностями по теореме компенсации так, чтобы на них были те же падения напряжения:

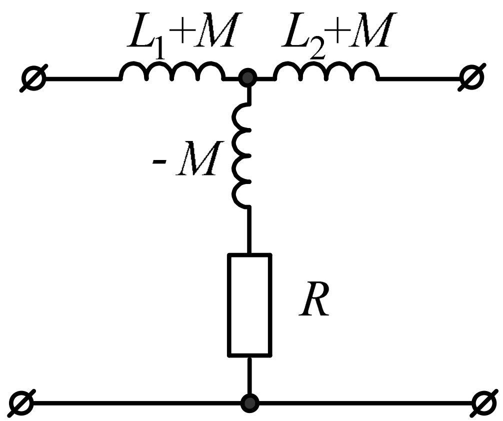
Правило развязки

1-й случай. К узлу подключены одноимённые зажимы.



2-й случай. К узлу подключены разноимённые зажимы.

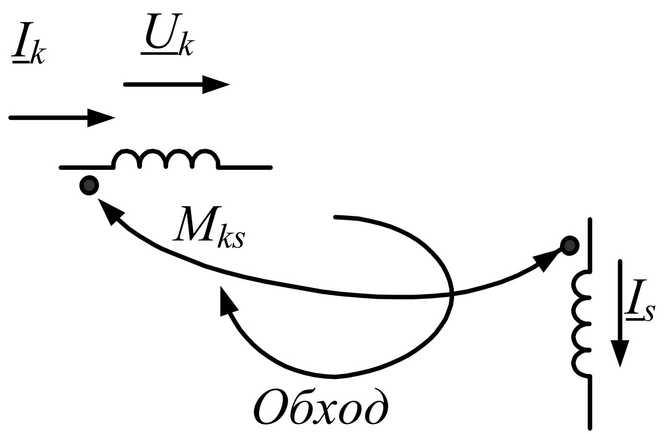




Расчёт сложных цепей, содержащих взаимные индуктивности

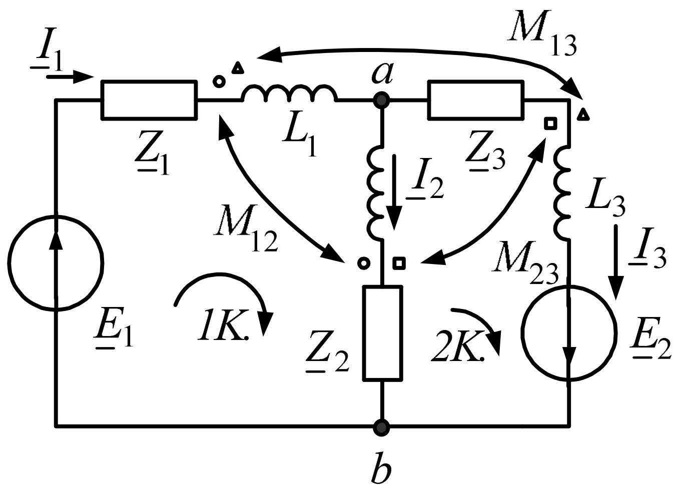
Расчет сложных цепей со взаимными индуктивностями проводят по законам Кирхгофа или по МКТ. МУП менее удобен, т.к. ЭДС взаимной индукции выражается через токи. Нельзя применять МЭГ, если есть связь внутренних и внешних цепей. Нельзя применять преобразование треугольник – звезда и обратно без развязки схем.

Правило составления уравнений



Напряжение $\underline{U}_{\mathrm{ks}}$, наводимое на элемент k, равно $+j\omega M_{\mathrm{ks}}\underline{I}_{\mathrm{s}}$, если направление обхода элемента k и ток $\underline{I}_{\mathrm{s}}$ одинаково направлены относительно одноимённых зажимов.

Пример



По первому закону Кирхгофа:

$$\underline{I}_1 - \underline{I}_2 - \underline{I}_3 = 0.$$

По 2 ЗК:

1-й контур:

$$\underline{I}_1 \underline{z}_1 + j\omega L_1 \underline{I}_1 - j\omega M_{12} \underline{I}_2 + j\omega M_{13} \underline{I}_3 + j\omega L_2 \underline{I}_2 - j\omega M_{12} \underline{I}_1 -$$

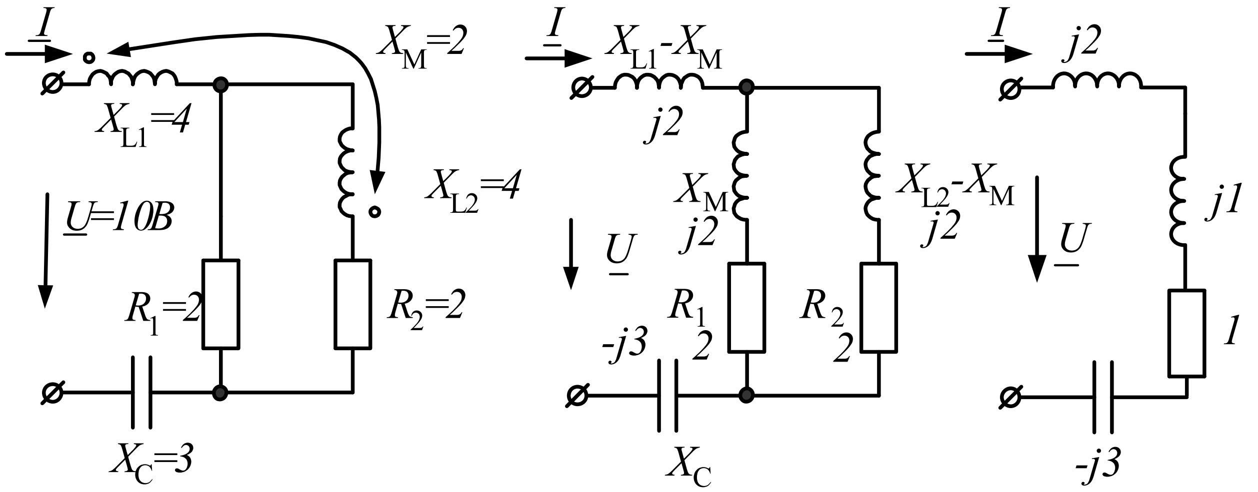
$$- j\omega M_{23} \underline{I}_3 + \underline{z}_2 \underline{I}_2 = \underline{E}_1$$

2-й контур:

$$\underline{I}_3 \underline{z}_3 + j\omega L_3 \underline{I}_3 + j\omega M_{13} \underline{I}_1 + j\omega L_3 \underline{I}_3 - j\omega M_{23} \underline{I}_2 - \underline{I}_2 \underline{z}_2 - j\omega L_2 \underline{I}_2 +$$

$$+ j\omega M_{12} \underline{I}_1 + j\omega M_{23} \underline{I}_3 = \underline{E}_2$$

Пример применения развязки



Найти ток *I*.

Применяем развязку (к узлу подключены одноименные зажимы), избавляемся от магнитных связей, делаем свертку. Входное сопротивление: $\underline{z}_{вх} = 1 + j3 - j3 = 1\text{Ом}$.

Входной ток: $\underline{I}_{вх} = \dfrac{\underline{U}}{1 \cdot \text{Ом}} = 10\text{А}$